Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 18

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $\frac{2}{\sqrt{3}-1}-\left(\sqrt{3}+1\right)=0$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2+x+3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $7^{2x+1}=7^{4-x}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie impar.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$ și $B(2,5)$. Determinați lungimea segmentului BC, unde punctul C este simetricul punctului B față de punctul A.

5p **6.** Calculați $\sin x$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot A=xA$.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $\det\left(A+I_2\right)+\det\left(A-I_2\right)=\det\left(aI_2\right)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziţie $x\circ y=xy+x+y-5$.

5p **a)** Arătați că $(-1)\circ 2020=-6$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x=-2$.

5p **c)** Știind că m este număr real astfel încât $m\circ(-2)=1\circ(-m)$, calculați $m\circ(-m)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-2\right)dx=\frac{1}{4}$.

5p **b)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(2)=7$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 e^x\left(f(x)-x^3+x^2\right)dx=3e-4$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 18

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{2}{\sqrt{3}-1}-\left(\sqrt{3}+1\right)=\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1}-\left(\sqrt{3}+1\right)=$	**3p**
	$=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1=0$	**2p**
2.	$f(0)=3$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy sunt $x=0$ și $y=3$	**2p**
3.	$2x+1=4-x \Leftrightarrow 3x=3$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 45 de numere impare, deci sunt 45 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	$AB=2$	**2p**
	A este mijlocul segmentului BC, deci $BC=2AB=4$	**3p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{4}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2\cdot 1-2\cdot 1=0$	**3p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix}$, $xA=\begin{pmatrix}2x & x\\ 2x & x\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & x\\ 2x & x\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=3$	**2p**
c)	$\det\left(A+I_2\right)=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4$, $\det\left(A-I_2\right)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2$, $\det\left(aI_2\right)=a^2$, pentru orice număr real a	**3p**
	$a^2=2 \Leftrightarrow a=-\sqrt{2}$ sau $a=\sqrt{2}$	**2p**
2.a)	$(-1)\circ 2020=(-1)\cdot 2020+(-1)+2020-5=$	**3p**
	$=-1-5=-6$	**2p**

b)	$x \circ x = x^2 + 2x - 5$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ sau $x = 1$	**3p**
c)	$m \cdot (-2) + m + (-2) - 5 = 1 \cdot (-m) + 1 + (-m) - 5 \Leftrightarrow m = 3$	**3p**
	$m \circ (-m) = 3 \circ (-3) = 3 \cdot (-3) + 3 + (-3) - 5 = -14$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{2x \cdot x - \left(x^2 - 1\right)}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} =$	**3p**
	$= \dfrac{x^2 + 1}{x^2} = 1 + \dfrac{1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 1$	**2p**
	$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$, deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f''(x) = -\dfrac{2}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$	**2p**
	$f''(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția f este concavă	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^1 \left(f(x) - 2\right)dx = \int\limits_0^1 x^3 dx = \dfrac{x^4}{4}\Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= \dfrac{1}{4} - 0 = \dfrac{1}{4}$	**2p**
b)	$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + 2x + c$, unde $c \in \mathbb{R}$	**2p**
	$F(2) = 7 \Rightarrow c = -1$, deci $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + 2x - 1$	**3p**
c)	$\int\limits_0^1 e^x \left(f(x) - x^3 + x^2\right)dx = \int\limits_0^1 e^x \left(x^2 + 2\right)dx = e^x \left(x^2 + 2\right)\Big\vert_0^1 - \int\limits_0^1 2xe^x dx =$	**3p**
	$= 3e - 2 - 2\left(xe^x\Big\vert_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx\right) = 3e - 4$	**2p**