Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că, dacă $z=3+i$, unde z este număr complex, atunci $z^2-6z+10=0$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+2x-6$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x+3}=x+1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor sale să fie un număr prim.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$ și $B(3,-1)$. Știind că punctul M este simetricul lui A față de B și punctul N este simetricul lui B față de M, determinați coordonatele punctului N.

5p **6.** Arătați că, dacă $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ și $\sin x+\cos x=\cos 2x$, atunci $\sin x-\cos x=-1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}2^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați rangul matricei $B=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)-I_3$.

2. Pe mulțimea numerelor raționale se definește legea de compoziție $x*y=x^2y^2-2x^2-2y^2+6$.

5p **a)** Arătați că $1*1=3$.

5p **b)** Arătați că $x*y\neq 2$, pentru orice numere raționale x și y.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi pentru care $m*n=3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-2\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x(x+2)}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați numărul real $a\in(-1,+\infty)$, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=3x+2020$.

5p **c)** Demonstrați că $(x+1)^2\geq 2\ln(x+1)+1$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^3 f^2(x)\,dx=15$.

5p **b)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

5p **c)** Arătați că $(n+2)I_n + 2(n-1)I_{n-2} = 3\sqrt{3}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 3$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2-6z+10=(3+i)^2-6(3+i)+10=9+6i+i^2-18-6i+10=$	**3p**
	$=9+(-1)-8=0$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-4x=x^2+2x-6\Leftrightarrow -6x=-6$	**3p**
	$x=1$	**2p**
3.	$2x+3=(x+1)^2\Rightarrow 2x+3=x^2+2x+1\Rightarrow x^2=2$	**2p**
	$x=-\sqrt{2}$, care nu convine sau $x=\sqrt{2}$, care convine	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor un număr prim sunt 12, 21, 13, 31, 15, 51, 17 și 71, deci sunt 8 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{8}{90}=\dfrac{4}{45}$	**1p**
5.	B este mijlocul segmentului $AM\Rightarrow x_B=\dfrac{x_A+x_M}{2}$ și $y_B=\dfrac{y_A+y_M}{2}$, deci $M(7,-4)$	**2p**
	M este mijlocul segmentului $BN\Rightarrow x_M=\dfrac{x_B+x_N}{2}$ și $y_M=\dfrac{y_B+y_N}{2}$, deci $N(11,-7)$	**3p**
6.	$\sin x+\cos x=\cos 2x\Leftrightarrow \sin x+\cos x=\cos^2 x-\sin^2 x\Leftrightarrow \sin x+\cos x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$	**3p**
	Cum $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, obținem $\cos x-\sin x=1$, deci $\sin x-\cos x=-1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2+0+0-0-0-0=2$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}2^x&0&0\\0&1&2x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^y&0&0\\0&1&2y\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^x\cdot 2^y&0&0\\0&1&2y+2x\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}2^{x+y}&0&0\\0&1&2(x+y)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

c)	$B=A(1+2+3)-I_3=A(6)-I_3=\begin{pmatrix}2^6-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 12\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
	Cum $\det B=0$ și $\begin{vmatrix}2^6-1 & 0\\ 0 & 12\end{vmatrix}=12\left(2^6-1\right)\neq 0$, obținem că rangul matricei B este egal cu 2	**3p**
2.a)	$1*1=1^2\cdot 1^2-2\cdot 1^2-2\cdot 1^2+6=$	**3p**
	$=1-2-2+6=3$	**2p**
b)	$x^2y^2-2x^2-2y^2+6=2\Leftrightarrow x^2\left(y^2-2\right)-2\left(y^2-2\right)=0\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)\left(y^2-2\right)=0$	**3p**
	$x^2=2$ sau $y^2=2$, ceea ce este imposibil pentru orice numere raționale x și y, deci $x*y\neq 2$	**2p**
c)	$m^2n^2-2m^2-2n^2+6=3\Leftrightarrow m^2n^2-2m^2-2n^2+4=1\Leftrightarrow\left(m^2-2\right)\left(n^2-2\right)=1$	**2p**
	m și n sunt numere întregi $\Rightarrow m^2-2=n^2-2=-1$ sau $m^2-2=n^2-2=1$, deci $m^2=n^2=1$ sau $m^2=n^2=3$, de unde obținem perechile de numere întregi $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x+2-\dfrac{2}{x+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x^2+4x+2-2}{x+1}=\dfrac{2x(x+2)}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ are panta egală cu $f'(a)$ și, cum dreapta de ecuație $y=3x+2020$ are panta egală cu 3, obținem $f'(a)=3$	**2p**
	$\dfrac{2a(a+2)}{a+1}=3\Leftrightarrow 2a^2+a-3=0$ și, cum $a\in(-1,+\infty)$, obținem $a=1$	**3p**
c)	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-1,0]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-1,0]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty)\Rightarrow f(x)\geq f(0)$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$ și, cum $f(0)=0$, obținem $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
	$x^2+2x\geq 2\ln(x+1)\Leftrightarrow(x+1)^2\geq 2\ln(x+1)+1$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^3 f^2(x)dx=\int_0^3\left(x^2+2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg\vert_0^3=$	**3p**
	$=9+6=15$	**2p**
b)	$\displaystyle 0\leq I_n=\int_0^1 x^n f(x)dx=\int_0^1 x^n\sqrt{x^2+2}\,dx\leq\sqrt{3}\int_0^1 x^n\,dx=\sqrt{3}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg\vert_0^1=\frac{\sqrt{3}}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	Cum $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3}}{n+1}=0$, obținem $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=0$	**2p**
c)	$\displaystyle I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{x^2+2}\,dx=\int_0^1\frac{x^n\left(x^2+2\right)}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int_0^1 x^{n+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx+2\int_0^1 x^{n-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx=$	**2p**
	$\displaystyle=\int_0^1 x^{n+1}\left(\sqrt{x^2+2}\right)'dx+2\int_0^1 x^{n-1}\left(\sqrt{x^2+2}\right)'dx=\sqrt{3}-(n+1)I_n+2\sqrt{3}-2(n-1)I_{n-2}$ și obținem $(n+2)I_n+2(n-1)I_{n-2}=3\sqrt{3}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 3$	**3p**