

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că, dacă $z^2 + z + 2 = 0$, unde z este număr complex, atunci $z^2 + \frac{4}{z^2} = -3$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{2x\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x .
Arătați că $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x)$, pentru orice număr real x .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1} - 3^x = 2^{x+2} - 2^{x+1}$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A = \{\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \dots, \sqrt{25}\}$, numerele 3, 4 și a să reprezinte lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.
- 5p 5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele M și N astfel încât $\overline{AM} = \frac{1}{4}\overline{AC}$ și $\overline{AN} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.
Demonstrați că punctele D , M și N sunt coliniare.
- 5p 6. Arătați că, dacă ABC este un triunghi oarecare, atunci $\cos A < \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + my + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(m)) = m - 9$, pentru orice număr real m .
- 5p b) Determinați numărul real m pentru care sistemul de ecuații admite soluții diferite de $(0, 0, 0)$.
- 5p c) Pentru $m = 9$, se consideră (x_0, y_0, z_0) o soluție a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale astfel încât $(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$. Calculați $\frac{x_0^2 + y_0^2 - z_0^2}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$.
2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x * y = xy + 5x + 5y + 20$.
- 5p a) Arătați că $2 * (-1) = 23$.
- 5p b) Demonstrați că $e = -4$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Pentru $r \in \{0, 1, 2\}$, notăm cu $A(r)$ mulțimea numerelor naturale care au restul r la împărțirea cu 3. Determinați numerele $r \in \{0, 1, 2\}$ pentru care $A(r)$ este parte stabilă a lui \mathbb{Z} în raport cu legea de compoziție „*”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(e^x - e)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = xe^x - e$, $x \in (-1, +\infty)$.

- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f , în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Determinați punctul de extrem al funcției f .
2. Se consideră funcția $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x^2+1}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{\ln(x+2)} dx = \frac{\pi}{4}$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.
- 5p** c) Arătați că $\int_0^1 \left(f(x) + \frac{\operatorname{arctg} x}{x+2} \right) dx = \frac{\pi}{4} \ln 3$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z^2 + z + 2 = 0 \Rightarrow z \neq 0$ și $z + \frac{2}{z} = -1$	2p
	$\left(z + \frac{2}{z}\right)^2 = 1$, deci $z^2 + 4 + \frac{4}{z^2} = 1$, de unde obținem $z^2 + \frac{4}{z^2} = -3$	3p
2.	$f\left(x + \frac{1}{2}\right) = \left\{2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right\} = \{2x + 1\} =$ $= \{2x\} = f(x)$, pentru orice număr real x	2p 3p
3.	$3^x(3-1) = 2^{x+1}(2-1) \Leftrightarrow 2 \cdot 3^x = 2^{x+1} \Leftrightarrow 3^x = 2^x$ $x = 0$	3p 2p
4.	Mulțimea A are 23 de elemente, deci sunt 23 de cazuri posibile Numerele a din mulțimea A astfel încât 3, 4 și a să fie lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic sunt $\sqrt{7}$ (dacă a este lungimea unei catete) și $\sqrt{25}$ (dacă a este lungimea ipotenuzei), deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{23}$	2p 2p 1p
5.	$\overline{DM} = \overline{DA} + \overline{AM} = \overline{DA} + \frac{1}{4}\overline{AC} = \overline{DA} + \frac{1}{4}(\overline{AB} + \overline{AD}) = \frac{1}{4}(\overline{AB} - 3\overline{AD})$ $\overline{DN} = \overline{DA} + \overline{AN} = \overline{DA} + \frac{1}{3}\overline{AB} = \frac{1}{3}(\overline{AB} - 3\overline{AD}) = \frac{4}{3}\overline{DM}$, deci \overline{DM} și \overline{DN} sunt coliniari, de unde obținem că punctele D , M și N sunt coliniare	2p 3p
6.	$\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB \cdot AC}$ Cum $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} < \frac{AB^2 + AC^2}{2AB \cdot AC}$, obținem $\cos A < \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}\right)$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(m)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2m + (-6) + 2 - m - (-3) - 8 =$ $= m + 5 - 14 = m - 9$, pentru orice număr real m	3p 2p
b)	Sistemul de ecuații este omogen, deci admite soluții diferite de $(0,0,0) \Leftrightarrow \det(A(m)) = 0$ $m = 9$	3p 2p

c)	$A(9) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \det(A(9)) = 0 \text{ și } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A(9)) = 2, \text{ deci soluțiile nenule}$ <p>ale sistemului de ecuații sunt de forma $\left(-\frac{7}{5}\alpha, \frac{1}{5}\alpha, \alpha\right)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}^*$</p> $\frac{x_0^2 + y_0^2 - z_0^2}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \frac{\frac{49\alpha^2}{25} + \frac{\alpha^2}{25} - \alpha^2}{\frac{49\alpha^2}{25} + \frac{\alpha^2}{25} + \alpha^2} = \frac{25\alpha^2}{75\alpha^2} = \frac{1}{3}$	3p 2p
2.a)	$2 * (-1) = 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + 20 =$ $= -2 + 10 + (-5) + 20 = 23$	3p 2p
b)	$x * (-4) = x \cdot (-4) + 5x + 5 \cdot (-4) + 20 = -4x + 5x + (-20) + 20 = x, \text{ pentru orice număr întreg } x$ $(-4) * x = (-4) \cdot x + 5 \cdot (-4) + 5x + 20 = -4x + (-20) + 5x + 20 = x, \text{ pentru orice număr întreg } x,$ <p>deci $e = -4$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”</p>	3p 2p
c)	<p>Cum $0 \circ 0 = 20, 0 \in A(0)$ și $20 \notin A(0)$, mulțimea $A(0)$ nu este parte stabilă a lui \mathbb{Z} în raport cu legea de compoziție „*”</p> <p>$x, y \in A(1) \Rightarrow x = 3m + 1$ și $y = 3n + 1$, unde $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x * y = 9mn + 18m + 18n + 31 \in A(1)$, deci $A(1)$ este parte stabilă a lui \mathbb{Z} în raport cu legea de compoziție „*”, deci $r = 1$ convine</p> <p>$x, y \in A(2) \Rightarrow x = 3k + 2$ și $y = 3l + 2$, unde $k, l \in \mathbb{N} \Rightarrow x * y = 9kl + 21k + 21l + 44 \in A(2)$, deci $A(2)$ este parte stabilă a lui \mathbb{Z} în raport cu legea de compoziție „*”, deci $r = 2$ convine</p>	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x - e + (x-1)e^x =$ $= e^x - e + xe^x - e^x = xe^x - e, x \in (-1, +\infty)$	3p 2p
b)	$f(1) = 0, f'(1) = 0$ <p>Ecuția tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, adică $y = 0$</p>	2p 3p
c)	$f''(x) = (x+1)e^x > 0, \text{ pentru orice } x \in (-1, +\infty) \Rightarrow f' \text{ strict crescătoare pe } (-1, +\infty) \text{ și,}$ <p>cum $f'(1) = 0$, obținem că $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (-1, 1)$ și $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$</p> <p>Cum f este strict descrescătoare pe $(-1, 1)$, f este strict crescătoare pe $(1, +\infty)$ și f este continuă în $x_0 = 1$, obținem că $x_0 = 1$ este punctul de extrem al funcției f</p>	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{\ln(x+2)} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \text{arctg } x \Big _0^1 =$ $= \text{arctg } 1 - \text{arctg } 0 = \frac{\pi}{4}$	3p 2p
b)	<p>Din regula lui l'Hospital, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+2)}{x^2+1} =$</p> $= \ln 2$	3p 2p
c)	$\int_0^1 \left(f(x) + \frac{\text{arctg } x}{x+2} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+1} \cdot \ln(x+2) + \text{arctg } x \cdot \frac{1}{x+2} \right) dx = \int_0^1 \left(\text{arctg } x \cdot \ln(x+2) \right)' dx =$ $= \text{arctg } x \cdot \ln(x+2) \Big _0^1 = \text{arctg } 1 \cdot \ln 3 - \text{arctg } 0 \cdot \ln 2 = \frac{\pi}{4} \ln 3$	3p 2p