Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 16

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că $\log_5 5-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):\frac{5}{12}=0$.

5p **2.** Determinați numărul natural n pentru care punctul $A(n,7)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-9}=x-3$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie de forma $\overline{aa}$, unde a este cifră nenulă.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(5,4)$ şi $C(3,0)$. Calculați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați măsura unghiului B al triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $AC=3$ și $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=4$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A+3A+4I_2=O_2$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x și y astfel încât $A\cdot A\cdot A=xA+yI_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=2xy-2x-2y+3$.

5p **a)** Arătați că $2020*1=1$.

5p **b)** Demonstraţi că $x*y=2(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $(x*x)*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^3-9x+5$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=9(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(2019)+f(2021)\le f(2020)+f(2022)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 (f(x)+4)\,dx=9$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^1 \frac{1}{f(x)+5}\,dx$.

5p **c)** Determinaţi numărul real a, $a>0$, pentru care $\int_{\frac{1}{a}}^{a} f\left(\frac{1}{x}\right)dx=-8$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 16

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_5 5-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):\frac{5}{12}=1-\frac{6-4+3}{12}:\frac{5}{12}=1-\frac{5}{12}:\frac{5}{12}=$	**3p**
	$=1-1=0$	**2p**
2.	$f(n)=7\Rightarrow n^2+n+1=7\Rightarrow n^2+n-6=0$	**3p**
	Cum n este număr natural, obținem $n=2$	**2p**
3.	$x^2-9=x^2-6x+9\Rightarrow 6x=18$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele de două cifre de forma $\overline{aa}$ sunt 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 și 99, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**1p**
5.	$AB=4$, $d(C,AB)=4$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot d(C,AB)}{2}=\frac{4\cdot 4}{2}=8$	**2p**
6.	ΔABC este dreptunghic în A și $AC=\frac{BC}{2}$	**2p**
	$m(\sphericalangle B)=30^\circ$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)-2\cdot(-1)=$	**3p**
	$=2-(-2)=4$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $3A=\begin{pmatrix}-6 & 6\\ -3 & -3\end{pmatrix}$, $4I_2=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$A\cdot A+3A+4I_2=\begin{pmatrix}2-6+4 & -6+6+0\\ 3-3+0 & -1-3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
c)	$A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 10\\ -5 & 7\end{pmatrix}$, $xA+yI_2=\begin{pmatrix}-2x+y & 2x\\ -x & -x+y\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}2 & 10\\ -5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x+y & 2x\\ -x & -x+y\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=5$, $y=12$	**2p**

2.a)	$2020*1=2\cdot 2020\cdot 1-2\cdot 2020-2\cdot 1+3=$ $=-2+3=1$	**3p** **2p**
b)	$x*y=2xy-2x-2y+2+1=2(xy-x-y+1)+1=$ $=2\big(x(y-1)-(y-1)\big)+1=2(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**
c)	$x*x=2(x-1)^2+1$, $(x*x)*x=4(x-1)^3+1$, pentru orice număr real x $4(x-1)^3+1=x\Leftrightarrow (x-1)\left(4(x-1)^2-1\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ sau $x=1$ sau $x=\frac{3}{2}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=9x^2-9=$ $=9\left(x^2-1\right)=9(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f(1)=-1$, $f'(1)=0$ Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=-1$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe intervalul $[1,+\infty)$ $f(2019)\leq f(2020)$ și $f(2021)\leq f(2022)$, deci $f(2019)+f(2021)\leq f(2020)+f(2022)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^3 \left(f(x)+4\right)dx=\int_0^3 x^2dx=$ $=\frac{x^3}{3}\Big\|_0^3=\frac{27}{3}=9$	**2p** **3p**
b)	$\int_0^1 \frac{1}{f(x)+5}dx=\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}x\Big\|_0^1=$ $=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}$	**3p** **2p**
c)	$\int_{\frac{1}{a}}^{a} f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\left(\frac{1}{x^2}-4\right)dx=\left(-\frac{1}{x}-4x\right)\Big\|_{\frac{1}{a}}^{a}=\frac{3}{a}-3a$ $\frac{3}{a}-3a=-8\Leftrightarrow 3a^2-8a-3=0$ și, cum $a>0$, obținem $a=3$	**3p** **2p**