

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați partea întreagă a numărului $2 + 3\sqrt{5}$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2 - x$ și $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2 + x$. Arătați că $(f \circ g)(x) = (f \circ h)(x)$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{3}$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$. Determinați numărul de elemente ale mulțimii A care sunt divizibile cu 2 sau cu 3.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul ABC , punctul G , centrul său de greutate și punctele M și N astfel încât $\overline{BM} = \frac{1}{4}\overline{BA}$ și $\overline{CN} = \frac{2}{5}\overline{CA}$. Arătați că punctele M , N și G sunt coliniare.
- 5p** 6. Arătați că, dacă triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază $\frac{1}{2}$, atunci $\cos^2 A = 1 - BC^2$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(a)) = 4$, pentru orice număr real a .
- 5p** b) Arătați că $A(a) \cdot A(b) = 2A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p** c) Determinați numărul real x și numărul natural n pentru care $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(5) = 2^n A(x)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y - 7$.
- 5p** a) Arătați că $5 \circ 2 = 0$.
- 5p** b) Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 7 + \log_7 x$. Arătați că $f(x) \circ f(y) = f(xy)$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$.
- 5p** c) Demonstrați că $a^2 \circ b^2 \neq 0$, pentru orice numere întregi a și b .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}(x-5)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = e^{2x}(2x-9)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.
- 5p** c) Arătați că $e^{2x} \leq \frac{e^9}{2(5-x)}$, pentru orice $x \in (-\infty, 5)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 f(x)\sqrt{x^2+1} dx = 2$.

5p b) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}}$.

5p c) Determinați $a \in (1, +\infty)$ astfel încât $\int_0^x f(e^t) dt = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}) + \ln(a - 1)$, pentru orice număr real x .

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$[2 + 3\sqrt{5}] = 2 + [3\sqrt{5}] = 2 + [\sqrt{45}]$ $36 < 45 < 49 \Rightarrow 6 < 3\sqrt{5} < 7$, deci partea întreagă a numărului $2 + 3\sqrt{5}$ este egală cu 8	2p 3p
2.	$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g^2(x) - 4g(x) + 5 = (2-x)^2 - 4(2-x) + 5 = x^2 + 1$, pentru orice număr real x $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = h^2(x) - 4h(x) + 5 = (2+x)^2 - 4(2+x) + 5 = x^2 + 1$, pentru orice număr real x , deci $(f \circ g)(x) = (f \circ h)(x)$, pentru orice număr real x	3p 2p
3.	$x + 3 + 2\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{3-x} + 3 - x = 12 \Rightarrow \sqrt{(x+3)(3-x)} = 3 \Rightarrow 9 - x^2 = 9$ $x = 0$, care convine	3p 2p
4.	În mulțimea A sunt 15 numere divizibile cu 2 și 10 numere divizibile cu 3 Cum în mulțimea A sunt 5 numere care sunt divizibile și cu 2 și cu 3, obținem că în mulțimea A sunt $15 + 10 - 5 = 20$ de numere care sunt divizibile cu 2 sau cu 3	2p 3p
5.	$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{12}(-5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC})$, unde D este mijlocul segmentului BC $\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{15}(-5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}) = \frac{12}{15}\overrightarrow{MG}$, deci \overrightarrow{MG} și \overrightarrow{GN} sunt coliniari, de unde obținem că punctele M , N și G sunt coliniare	3p 2p
6.	$\frac{BC}{\sin A} = 2R$ și, cum $R = \frac{1}{2}$, obținem $BC = \sin A$ $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - BC^2$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ a & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot a =$ $= 4 - 0 = 4$, pentru orice număr real a	3p 2p
b)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2a + 2b & 4 \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a + b & 2 \end{pmatrix} = 2A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b	3p 2p
c)	$A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(5) = 2A(1+2) \cdot A(3) \cdot \dots \cdot A(5) = 2^4 A(1+2+3+4+5) = 2^4 A(15)$ $2^4 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 15 & 2 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ x & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow n = 4$ și $x = 15$	3p 2p
2.a)	$5 \circ 2 = 5 + 2 - 7 =$ $= 7 - 7 = 0$	3p 2p

b)	$f(x) \circ f(y) = f(x) + f(y) - 7 = 7 + \log_7 x + 7 + \log_7 y - 7 =$ $= 7 + \log_7 x + \log_7 y = 7 + \log_7(xy) = f(xy)$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$	3p 2p
c)	$a^2 \circ b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 7$ Pentru $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $ a \geq 3$ sau $ b \geq 3$, obținem $a^2 + b^2 \geq 9$, deci $a^2 \circ b^2 \neq 0$ Pentru $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $ a \leq 2$ și $ b \leq 2$, obținem $a^2 + b^2 \in \{0, 1, 2, 4, 5, 8\} \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 7$, deci $a^2 \circ b^2 \neq 0$, pentru orice numere întregi a și b	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^{2x} \cdot 2 \cdot (x-5) + e^{2x} \cdot 1 =$ $= e^{2x}(2x-10+1) = e^{2x}(2x-9)$, $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}(2x-9)}{e^{2x}(x-5)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-9}{x-5} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(2 - \frac{9}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{5}{x}\right)} = 2$	3p 2p
c)	$x \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f descrescătoare pe $\left(-\infty, \frac{9}{2}\right]$ și $x \in \left[\frac{9}{2}, +\infty\right) \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f crescătoare pe $\left[\frac{9}{2}, +\infty\right)$; obținem $f(x) \geq f\left(\frac{9}{2}\right) = -\frac{e^9}{2}$, pentru orice număr real x Cum $e^{2x}(x-5) \geq -\frac{e^9}{2}$ și $x-5 < 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 5) \Rightarrow e^{2x} \leq \frac{e^9}{2(5-x)}$, pentru orice $x \in (-\infty, 5)$	3p 2p
2.a)	$\int_0^2 f(x)\sqrt{x^2+1} dx = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \sqrt{x^2+1} dx = \int_0^2 x dx =$ $= \frac{x^2}{2} \Big _0^2 = \frac{4}{2} - 0 = 2$	2p 3p
b)	$\int_1^2 \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx =$ $= \sqrt{x^2+1} \Big _1^2 + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \Big _1^2 = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$	3p 2p
c)	$\int_0^x f(e^t) dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{e^{2t}+1}} \cdot (e^t)' dt = \ln(e^t + \sqrt{e^{2t}+1}) \Big _0^x = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}) - \ln(1+\sqrt{2})$, pentru orice număr real x $\ln(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}) - \ln(1+\sqrt{2}) = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}) + \ln(a-1)$, pentru orice număr real x , deci $-\ln(1+\sqrt{2}) = \ln(a-1) \Leftrightarrow a-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, de unde obținem $a = \sqrt{2}$, care convine	3p 2p