

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul de elemente ale mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{5} < x < \sqrt{7}\}$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + a$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 2bx + 1$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b , știind că parabolele asociate celor două funcții au același vârf.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = 2$.
- 5p 4. Arătați că **nu** există nicio mulțime finită care să aibă exact 12 submulțimi cu 2 elemente.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$, $B(-4,3)$ și $C(5,0)$. Arătați că punctul $H(4,7)$ este ortocentrul triunghiului ABC .
- 5p 6. Calculați $\cos x$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $2(\cos^4 x - \sin^4 x) = -1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = I_3 + A$.
- 5p a) Arătați că $\det A = 0$.
- 5p b) Arătați că matricea $I_3 - \frac{1}{11}A$ este inversa matricei B .
- 5p c) Dați exemplul de trei matrice $U, V, T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de rang 1, astfel încât $U + V + T = B$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 3x - 3y + a$, unde a este număr real.
- 5p a) Determinați numărul real a pentru care $(-1) * 1 = 0$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „ $*$ ” admite element neutru.
- 5p c) Demonstrați că, dacă $a \in [12, +\infty)$, atunci mulțimea $[3, +\infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$, $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} + f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n) \right)^{\sqrt{n}}$.
- 5p c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 (x^4 + 1) f(x) dx = \frac{1}{3}$.

5p b) Demonstrați că $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{\pi}{8}$.

5p c) Se consideră primitiva F a lui f pentru care $F(1) = 0$. Calculați $\int_0^1 F(x) dx$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$-3 < -\sqrt{5} < -2$ și $2 < \sqrt{7} < 3$, deci $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ Mulțimea A are 5 elemente	3p 2p
2.	Parabolele asociate celor două funcții au același vârf, deci $\frac{2}{2} = \frac{-2b}{-2}$ și $\frac{4a-4}{4} = \frac{4b^2+4}{4}$ $b = 1$, deci $a = 3$	3p 2p
3.	$1+x+1-x+3 \cdot \sqrt[3]{1+x} \cdot \sqrt[3]{1-x} (\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x}) = 8$ și, cum $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = 2$, obținem $2+6 \cdot \sqrt[3]{1+x} \cdot \sqrt[3]{1-x} = 8$ $\sqrt[3]{(1+x)(1-x)} = 1$, deci $x = 0$, care convine	3p 2p
4.	Numărul de submulțimi cu 2 elemente ale unei mulțimi cu n elemente, $n \geq 2$, este egal cu $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ $\frac{n(n-1)}{2} = 12 \Leftrightarrow n^2 - n - 24 = 0$, care nu are nicio soluție număr natural	2p 3p
5.	$m_{AH} = 3$ și $m_{BC} = -\frac{1}{3} \Rightarrow m_{AH} \cdot m_{BC} = -1$, deci $AH \perp BC$ $m_{BH} = \frac{1}{2}$ și $m_{AC} = -2 \Rightarrow m_{BH} \cdot m_{AC} = -1$, deci $BH \perp AC$ și, cum $AH \cap BH = \{H\}$, obținem că H este ortocentrul triunghiului ABC	2p 3p
6.	$2(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = -1$, deci $2(2\cos^2 x - 1) = -1$ $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ și, cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x = \frac{1}{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 36 + 36 + 36 - 36 - 36 - 36 =$ $= 108 - 108 = 0$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 10 \\ 60 & 40 & 20 \\ 90 & 60 & 30 \end{pmatrix} = 10A \Rightarrow \left(I_3 - \frac{1}{11}A\right) \cdot B = I_3 + A - \frac{1}{11}A - \frac{1}{11}A \cdot A = I_3 + \frac{10}{11}A - \frac{10}{11}A = I_3$ $B \cdot \left(I_3 - \frac{1}{11}A\right) = I_3 - \frac{1}{11}A + A - \frac{1}{11}A \cdot A = I_3 + \frac{10}{11}A - \frac{10}{11}A = I_3$, deci matricea $I_3 - \frac{1}{11}A$ este inversa matricei B	3p 2p

c)	<p>Considerăm $U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, pentru care rang $U = 1$, rang $V = 1$ și rang $T = 1$</p> <p>Cum $U + V + T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, obținem că matricele $U, V, T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ au rangul 1 și $U + V + T = B$</p>	3p 2p
2.a)	<p>$(-1) \cdot 1 = (-1) \cdot 1 - 3 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + a = a - 1$ $a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$</p>	3p 2p
b)	<p>Există $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * e = e * x = x$, pentru orice număr real $x \Leftrightarrow xe - 3x - 3e + a = x$, pentru orice număr real x $x(e - 4) - 3e + a = 0$, pentru orice număr real $x \Leftrightarrow e = 4$ și $a = 12$</p>	2p 3p
c)	<p>$x * y = xy - 3x - 3y + 9 + a - 9 = (x - 3)(y - 3) + a - 9$, pentru orice numere reale x și y Pentru orice $x, y \in [3, +\infty)$, $x - 3 \geq 0$ și $y - 3 \geq 0$ și, cum $a \in [12, +\infty)$, obținem $x * y \geq 3$, deci mulțimea $[3, +\infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea de compoziție „*”</p>	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	<p>$f'(x) = (\sqrt{x+1})' - (\sqrt{x})' =$ $= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$, $x \in (0, +\infty)$</p>	2p 3p
b)	<p>$f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+1}} - \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1 \right)$, pentru orice număr natural nenul n</p> <p>$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} + f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n) \right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2} \right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \right)^{\sqrt{n}} =$ $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \right)^{2\sqrt{n+1}} \right)^{\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$</p>	2p 3p
c)	<p>Pentru orice $x \in (0, +\infty)$, $\sqrt{x+1} > \sqrt{x} > 0$, deci $\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0, +\infty)$, deci f este injectivă</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, f monotonă și continuă pe $(0, +\infty)$, deci $\text{Im } f = (0, 1) \Rightarrow f$ este surjectivă, de unde obținem că f este bijectivă</p>	2p 3p
2.a)	<p>$\int_0^1 (x^4 + 1) f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$</p>	3p 2p
b)	<p>$x \in [0, 1] \Rightarrow x^2 \leq x$, deci $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 1} dx \leq \int_0^1 \frac{x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2)'}{(x^2)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \arctg(x^2) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{2} \arctg 1 - \frac{1}{2} \arctg 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$</p>	3p 2p

c)	$\int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 x' F(x) dx = xF(x) \Big _0^1 - \int_0^1 x f(x) dx = F(1) - \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 1} dx =$ $= -\frac{1}{4} \int_0^1 \frac{(x^4 + 1)'}{x^4 + 1} dx = -\frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) \Big _0^1 = -\frac{1}{4} \ln 2$	3p 2p
-----------	---	----------------------------