

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*

Test 15

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right) : \frac{17}{60} = 1$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 1$ . Calculați  $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) \cdot f(5)$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{4x-3} = 5$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr  $x$  din mulțimea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $x^2 - 2x \leq 0$ .
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(0,6)$  și  $B(6,0)$ . Arătați că triunghiul  $AOB$  este isoscel.
- 5p 6. Calculați aria triunghiului  $ABC$  dreptunghic în  $A$  cu  $AB = 6$  și  $AC = 8$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B(x) = \begin{pmatrix} -1 & x \\ x-1 & -1 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(B(1)) = 1$ .
- 5p b) Arătați că  $A \cdot A - 2A = I_2$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $A \cdot B(x) = I_2$ .
- 2) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy + x + y - 2$ .
- 5p a) Arătați că  $(-1) * 2020 = -3$ .
- 5p b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x * (2x) = 3$ .
- 5p c) Determinați perechile  $(m, n)$  de numere naturale pentru care  $m * n = -1$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^2 - 5x + \ln x$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{(x-1)(4x-1)}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{f(x)} = 0$ .
- 5p c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = 1$ , situat pe graficul funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_{-1}^1 (f(x) - x^2 - x - 1) dx = 0$ .
- 5p b) Arătați că funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p c) Determinați numerele reale  $a$  pentru care  $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2 + 1} \cdot e^x dx = (ae)^2 - e$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**

**Matematică *M\_tehnologic***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Test 15**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right) : \frac{17}{60} = \left(\frac{60}{60} - \frac{40}{60} + \frac{45}{60} - \frac{48}{60}\right) : \frac{17}{60} =$ $= \frac{17}{60} : \frac{17}{60} = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.</b>	$f(1) = 0$ $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) \cdot f(5) = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>3.</b>	$4x - 3 = 25 \Rightarrow 4x = 28$ $x = 7$ , care convine	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	Mulțimea $A$ are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile Numerele $x$ din mulțimea $A$ care verifică inegalitatea $x^2 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow x(x - 2) \leq 0$ sunt 1 și 2, deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	<b>2p</b> <b>2p</b> <b>1p</b>
<b>5.</b>	$AO = 6$ $BO = 6 \Rightarrow \triangle AOB$ este isoscel	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>6.</b>	$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} =$ $= 24$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$B(1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(1)) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 1 =$ $= 1 - 0 = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$A \cdot A - 2A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} 2x-3 & x-2 \\ x-2 & x-1 \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $x$ $\begin{pmatrix} 2x-3 & x-2 \\ x-2 & x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , de unde obținem $x = 2$ , care convine	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$(-1) * 2020 = (-1) \cdot 2020 + (-1) + 2020 - 2 =$ $= -2020 - 1 + 2020 - 2 = -3$	<b>3p</b> <b>2p</b>

<b>b)</b>	$x \cdot (2x) + x + 2x - 2 = 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0$	<b>3p</b>
	$x = -\frac{5}{2}$ sau $x = 1$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$m \cdot n = mn + m + n - 2 = m(n+1) + (n+1) - 3 = (m+1)(n+1) - 3$ , pentru orice numere naturale $m$ și $n$	<b>2p</b>
	$(m+1)(n+1) - 3 = -1 \Leftrightarrow (m+1)(n+1) = 2$ și, cum $m$ și $n$ sunt numerele naturale, obținem $(0,1)$ și $(1,0)$	<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = 4x - 5 + \frac{1}{x} =$	<b>2p</b>
	$= \frac{4x^2 - 5x + 1}{x} = \frac{(x-1)(4x-1)}{x}, x \in (0, +\infty)$	<b>3p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x^2 - 5x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(2x^2 - 5x + \ln x)'} =$	<b>3p</b>
	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{4x^2 - 5x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x^2 - 5x + 1} = 0$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$f(1) = -3, f'(1) = 0$	<b>2p</b>
	Ecuția tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ , adică $y = -3$	<b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_{-1}^1 (f(x) - x^2 - x - 1) dx = \int_{-1}^1 (x^3 + x^2 + x + 1 - x^2 - x - 1) dx = \int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big _{-1}^1 =$	<b>3p</b>
	$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$F'(x) = \left( \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right)' = \frac{4x^3}{4} + \frac{3x^2}{3} + \frac{2x}{2} + 1 =$	<b>3p</b>
	$= x^3 + x^2 + x + 1 = f(x), x \in \mathbb{R}$ , deci funcția $F$ este o primitivă a funcției $f$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2 + 1} \cdot e^x dx = \int_1^2 \frac{(x^2 + 1)(x + 1)}{x^2 + 1} \cdot e^x dx = \int_1^2 (x + 1)e^x dx = xe^x \Big _1^2 = 2e^2 - e$	<b>3p</b>
	$2e^2 - e = (ae)^2 - e$ , de unde obținem $a^2 = 2$ , deci $a = -\sqrt{2}$ sau $a = \sqrt{2}$	<b>2p</b>