

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $(2 + 3i)^2 = i(5i + 12)$, unde $i^2 = -1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$. Determinați numărul real a , astfel încât $(f \circ f)(x) = f(x + 1)$, pentru orice număr real x .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5 \cdot 2^{x+1} \cdot 3^x = 12 \cdot 5^x$.
- 5p 4. Determinați numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, care au proprietatea $f(1) \geq 3$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy , se consideră rombul $ABCD$ cu $A(-1, 3)$ și $C(-2, 4)$. Determinați panta dreptei BD .
- 5p 6. Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\cos 2x \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(x)) = 6^x$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Determinați numărul real x , știind că $A(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A(x)$.
- 5p c) Demonstrați că, orice matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X \cdot X = A(1)$ are două elemente numere iraționale.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x^2 + xy + y^2$.
- 5p a) Arătați că $x \circ x \geq 0$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Se consideră numerele reale a și b cu $a \neq b$. Determinați numărul real x pentru care $x \circ a = x \circ b$.
- 5p c) Determinați numărul real x cu proprietatea că $x \circ (x + 1) = -x^3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - (x + 1)\ln(x + 1)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 1 - \ln(x + 1)$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .
- 5p c) Demonstrați că funcția f este concavă.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - e^x$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2} - e$.
- 5p b) Calculați $\int_0^1 xf(x) dx$.
- 5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n (x - f(x)) dx$. Demonstrați că $I_n + nI_{n-1} = e$, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(2 + 3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 - 9 + 12i = -5 + 12i =$ $= 5i^2 + 12i = i(5i + 12)$	3p 2p
2.	$(f \circ f)(x) = x + a + a = x + 2a$, $f(x+1) = x+1+a$, pentru orice număr real x $x + 2a = x + 1 + a \Rightarrow a = 1$	3p 2p
3.	$5 \cdot 2 \cdot 2^x \cdot 3^x = 12 \cdot 5^x \Leftrightarrow 10 \cdot 6^x = 12 \cdot 5^x$ $\left(\frac{6}{5}\right)^x = \frac{6}{5}$, deci $x = 1$	3p 2p
4.	$f(1)$ poate fi aleasă în două moduri, iar $f(2)$ și $f(3)$ pot fi alese în câte patru moduri Există $4^2 \cdot 2 = 32$ de funcții $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ astfel încât $f(1) \geq 3$	3p 2p
5.	$m_{AC} = -1$ Cum $BD \perp AC$, obținem $m_{BD} = 1$	2p 3p
6.	$\cos 2x \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cos 2x \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin 2x \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ și, cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, deci $x = \frac{\pi}{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^x \end{vmatrix} = 2^x \cdot 3^x - 0 \cdot 0 =$ $= (2 \cdot 3)^x = 6^x$, pentru orice număr real x	3p 2p
b)	$A(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^x & 2^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 3^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^x & 2^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^x & 3^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2^x = 3^x$, de unde obținem $x = 0$	3p 2p
c)	$X \cdot X \cdot X = A(1) \cdot X$ și $X \cdot X \cdot X = X \cdot A(1) \Rightarrow A(1) \cdot X = X \cdot A(1)$, deci, pentru $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, unde a, b, c și d sunt numere reale, obținem $\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = 0$ și $c = 0$ $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ și $d \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, deci orice matrice X , pentru care $X \cdot X = A(1)$, are două elemente numere iraționale	3p 2p

2.a)	$x \circ x = x^2 + x \cdot x + x^2 =$ $= 3x^2 \geq 0$, pentru orice număr real x	3p 2p
b)	$x^2 + xa + a^2 = x^2 + xb + b^2 \Leftrightarrow x(a-b) + (a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(x+a+b) = 0$ Cum $a \neq b$, obținem $x = -a - b$	3p 2p
c)	$x^2 + x(x+1) + (x+1)^2 = -x^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ $(x+1)^3 = 0$, de unde obținem $x = -1$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2 - \ln(x+1) - (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} =$ $= 2 - \ln(x+1) - 1 = 1 - \ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$	3p 2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e - 1$ Pentru orice $x \in (-1, e - 1]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-1, e - 1]$ și pentru orice $x \in [e - 1, +\infty)$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[e - 1, +\infty)$	2p 3p
c)	$f''(x) = -\frac{1}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$ Cum, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ avem $-\frac{1}{x+1} < 0$, obținem $f''(x) < 0$, deci f este concavă	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x - e^x) dx = \left(\frac{x^2}{2} - e^x \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{2} - e + 1 = \frac{3}{2} - e$	3p 2p
b)	$\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x(x - e^x) dx = \int_0^1 (x^2 - xe^x) dx = \frac{x^3}{3} \Big _0^1 - (x-1)e^x \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$	3p 2p
c)	$I_n = \int_0^1 x^n (x - f(x)) dx = \int_0^1 x^n e^x dx = x^n e^x \Big _0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx =$ $= e - nI_{n-1}$, de unde obținem $I_n + nI_{n-1} = e$, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$	3p 2p