Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul complex z, pentru care $z=3\overline{z}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că numerele $f(0)$, $f(2)$ și $f(1)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(-x)=\log_3\left(x^2-2x-2\right)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{0,1,2,\ldots,9\}$, pătratul acestui număr să aparțină mulțimii A.

5p **5.** Se consideră punctele A, B, C și D, astfel încât $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$. Demonstrați că $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $BC=R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului. Calculați măsura unghiului A al triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=1$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Se consideră matricea $B(a)=A(a)-I_3$, unde a este număr real. Demonstrați că, pentru orice număr real a, $B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=O_3$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că suma elementelor matricei X pentru care $A(2)\cdot X=A(1)+A(2)+\ldots+A(n)$ este egală cu 21.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2+4xy+y^2$.

5p **a)** Arătați că $1*2=13$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(x*x)*x^2=61$.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de numere iraționale a pentru care numărul $a*1$ este natural.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3(x+1)}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^x$.

5p **c)** Demonstrați că $x^5+2\sqrt{x^{10}+3}\geq 3$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3 \left(f(x)-\ln x\right)dx=\frac{26}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_1^2 \left(f(x)-x^2\right)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^2 \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{3-4\ln^2 2}{8}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a+ib=3(a-ib)\Leftrightarrow 2a-4ib=0$, unde $z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$	**3p**
	$a=0$ și $b=0$, deci $z=0$	**2p**
2.	$f^2(2)=f(0)f(1)\Leftrightarrow(4+a)^2=a(2+a)\Leftrightarrow a^2+8a+16=a^2+2a$	**2p**
	$6a=-16$, deci $a=-\frac{8}{3}$	**3p**
3.	$-x=x^2-2x-2\Rightarrow x^2-x-2=0$	**2p**
	$x=-1$, care convine, sau $x=2$, care nu convine	**3p**
4.	Mulțimea $A=\{0,1,2,\ldots,9\}$ are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele din mulțimea A al căror pătrat aparține mulțimii A sunt 0, 1, 2 și 3, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=$	**2p**
	$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$	**3p**
6.	$\frac{BC}{\sin A}=2R\Leftrightarrow\sin A=\frac{BC}{2R}$	**2p**
	$BC=R\Rightarrow\sin A=\frac{1}{2}$ și, cum ΔABC este ascuțitunghic , obținem $m(\sphericalangle A)=30^\circ$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=$	**3p**
	$=1-0=1$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$B(a)=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B(a)\cdot B(a)=\begin{pmatrix}0 & 0 & a^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	$B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=\begin{pmatrix}0 & 0 & a^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=O_3$, pentru orice număr real a	**2p**

c)	$A(1)+A(2)+\ldots+A(n)=\begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2} & 0 \\ 0 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$, pentru orice număr natural nenul n și, cum $\det A(2)\neq 0$, $\left(A(2)\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obținem că $X=\begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2}-2n & 4n-n(n+1) \\ 0 & n & \frac{n(n+1)}{2}-2n \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$	**3p**
	Suma elementelor matricei X este egală cu $3n$, deci $3n=21\Leftrightarrow n=7$, care convine	**2p**
2.a)	$1*2=1^2+4\cdot 1\cdot 2+2^2=$	**3p**
	$=1+8+4=13$	**2p**
b)	$x*x=x^2+4x\cdot x+x^2=6x^2$, $(x*x)*x^2=\left(6x^2\right)*x^2=36x^4+24x^4+x^4=61x^4$	**3p**
	$61x^4=61\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=1$	**2p**
c)	$x*1=x^2+4x+1=x^2+4x+4-3=(x+2)^2-3$, pentru orice număr real x	**2p**
	De exemplu, pentru $a=\sqrt{p}-2$, unde p este număr prim, $p\geq 3$, obținem că $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $a*1=p-3\in\mathbb{N}$, deci există o infinitate de numere iraționale a pentru care numărul $a*1$ este natural	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1\cdot\sqrt{x^2+3}-(x-3)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+3-x^2+3x}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{3(x+1)}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+3}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{6-6x}{x^2+3}\right)^{\frac{x}{2}}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{6-6x}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{6-6x}}\right)^{\frac{x(6-6x)}{2\left(x^2+3\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{6-6x}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{6-6x}}\right)^{\frac{x^2\left(\frac{6}{x}-6\right)}{2x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}=e^{-3}$	**2p**
c)	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-1]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,+\infty)$ și, cum $f(-1)=-2$, obținem că $f(x)\geq -2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$x-3\geq -2\sqrt{x^2+3}\Leftrightarrow x+2\sqrt{x^2+3}\geq 3$, pentru orice număr real x, deci $x^5+2\sqrt{x^{10}+3}\geq 3$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int\limits_1^3\left(f(x)-\ln x\right)dx=\int\limits_1^3 x^2dx=\left.\dfrac{x^3}{3}\right\|_1^3=$	**3p**
	$=\dfrac{27}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{26}{3}$	**2p**

b)	$\int_1^2\left(f(x)-x^2\right)dx=\int_1^2 \ln x\,dx = x\ln x\Big\|_1^2-\int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=2\ln 2-x\Big\|_1^2=2\ln 2-2+1=2\ln 2-1$	**2p**
c)	$\int_1^2 \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^2}+\ln\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2\left(x^{-3}-\frac{1}{x}\ln x\right)dx=\left(\frac{x^{-2}}{-2}-\frac{1}{2}\ln^2 x\right)\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\ln^2 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln^2 1=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\ln^2 2=\frac{3-4\ln^2 2}{8}$	**2p**