

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 14

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\left(2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{15}{16} + \sqrt[3]{-8} = 0$.
- 5p 2. Determinați numărul real a , știind că punctul $A(4, 0)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + a$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x+1} = 5$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$, acesta să fie multiplu de 6.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 5)$ și $B(7, 5)$. Determinați lungimea segmentului OM , unde punctul M este mijlocul segmentului AB .
- 5p 6. Pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x = \frac{5}{13}$, arătați că $\operatorname{tg} x = \frac{12}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = 1$.
- 5p b) Arătați că $B \cdot B + A = O_2$.
- 5p c) Determinați $x, y \in (0, +\infty)$, pentru care $A \cdot B + B \cdot A - (A + B) = \begin{pmatrix} \log_2 x & 0 \\ 0 & \log_3 y \end{pmatrix}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + \frac{y}{5} + 1$.
- 5p a) Arătați că $2020 * 5 = 2022$.
- 5p b) Determinați numărul real x pentru care $(x * x) * x = \frac{24}{5}$.
- 5p c) Determinați numărul real x pentru care $5^x * 5^{x+1} = 11$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + 3x + 9$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 3(1-x)(1+x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 7}{x - 2} = -9$.
- 5p c) Demonstrați că $f(x) \leq 11$, pentru orice $x \in [-1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $\int_{-1}^1 f(x) \cdot (x^2 + 1) dx = 0$.
- 5p b) Calculați $\int_0^1 (x^2 + 1) e^x f(x) dx$.
- 5p c) Determinați $a \in (0, +\infty)$ pentru care $\int_0^a (f(x) - f(-x)) dx = \ln(2a)$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 14

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\left(2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{15}{16} + \sqrt[3]{-8} = \frac{30+5-3}{15} \cdot \frac{15}{16} + (-2) =$ $= \frac{32}{15} \cdot \frac{15}{16} - 2 = 2 - 2 = 0$	3p 2p
2.	$f(4) = 0 \Rightarrow -4 + a = 0$ $a = 4$	3p 2p
3.	$2x + 1 = 25 \Rightarrow 2x = 24$ $x = 12$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile Numerele din mulțimea A care sunt multipli de 6 sunt 30, 60 și 90, deci sunt 3 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$	2p 2p 1p
5.	$M(5,5)$ $OM = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$	3p 2p
6.	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$ și, cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x = \frac{12}{13}$ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{12}{13} \cdot \frac{13}{5} = \frac{12}{5}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) =$ $= 0 + 1 = 1$	3p 2p
b)	$B \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B \cdot B + A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$	3p 2p
c)	$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B + B \cdot A - (A + B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log_2 x & 0 \\ 0 & \log_3 y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_3 y = 1 \end{cases}$, de unde obținem $x = 2$ și $y = 3$, care convin	2p 3p
2.a)	$2020 * 5 = 2020 + \frac{5}{5} + 1 =$	3p

	$= 2020 + 1 + 1 = 2022$	2p
b)	$x * x = x + \frac{x}{5} + 1 = \frac{6x}{5} + 1, (x * x) * x = \left(\frac{6x}{5} + 1\right) * x = \frac{6x}{5} + 1 + \frac{x}{5} + 1 = \frac{7x}{5} + 2$	2p
	$\frac{7x}{5} + 2 = \frac{24}{5} \Leftrightarrow 7x + 10 = 24, \text{ de unde obținem } x = 2$	3p
c)	$5^x + \frac{5^{x+1}}{5} + 1 = 11 \Leftrightarrow 5^x + 5^x = 10 \Leftrightarrow 2 \cdot 5^x = 10$	3p
	$5^x = 5, \text{ de unde obținem } x = 1$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = -3x^2 + 3 =$ $= 3(1 - x^2) = 3(1 - x)(1 + x), x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 7}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} =$ $= f'(2) = -9$	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ sau } x = 1$ $x \in [-1, 1] \Rightarrow f'(x) \geq 0, \text{ deci } f \text{ este crescătoare pe } [-1, 1], x \in [1, +\infty) \Rightarrow f'(x) \leq 0, \text{ deci } f$ $\text{este descrescătoare pe } [1, +\infty) \text{ și, cum } f(1) = 11, \text{ obținem } f(x) \leq 11, \text{ pentru orice}$ $x \in [-1, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_{-1}^1 f(x) \cdot (x^2 + 1) dx = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 + 1} \cdot (x^2 + 1) dx = \int_{-1}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _{-1}^1 =$ $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$	3p 2p
b)	$\int_0^1 (x^2 + 1) e^x f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1) e^x \cdot \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 x e^x dx = (x - 1) e^x \Big _0^1 =$ $= 0 - (-1) e^0 = 1$	3p 2p
c)	$\int_0^a (f(x) - f(-x)) dx = \int_0^a \left(\frac{x}{x^2 + 1} - \frac{-x}{x^2 + 1} \right) dx = \int_0^a \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln(x^2 + 1) \Big _0^a = \ln(a^2 + 1)$ $\ln(a^2 + 1) = \ln(2a) \Rightarrow a^2 + 1 = 2a, \text{ de unde obținem } a^2 - 2a + 1 = 0, \text{ deci } a = 1, \text{ care convine}$	2p 3p