

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M\_șt-nat*

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numerele  $\sqrt{11} - \sqrt{5}$ ,  $\sqrt{6}$  și  $\sqrt{11} + \sqrt{5}$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p 2. Se consideră funcția  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ . Demonstrați că funcția  $f$  este impară.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $4^x + 2^x = \frac{3}{4}$ .
- 5p 4. Determinați numărul de submulțimi ordonate cu 3 elemente ale mulțimii  $\{1, 3, 5, 7\}$ .
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1, -2)$ ,  $B(0, 3)$  și  $C(-1, 2)$ . Determinați ecuația dreptei  $AD$ , știind că  $ABCD$  este paralelogram.
- 5p 6. Triunghiul  $ABC$  are  $AB = 10$  și  $AC = 5$ . Arătați că  $\sin C = 2 \sin B$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ -2x - 3y = 1 \\ 2x + 4y + az = -2 \end{cases}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(a)) = a + 2$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p b) Pentru  $a = 0$ , determinați inversa matricei  $A(a)$ .
- 5p c) Pentru  $a \neq -2$ , rezolvați sistemul de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = 5(x+2)(y+2) - 2$ .
- 5p a) Arătați că  $x * (-2) = -2$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p b) Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x - 10}{5}$ . Demonstrați că  $f(x+y) = f(x) * f(y)$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $x$ , astfel încât  $x * x * x = 23$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5} - x - 2$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Demonstrați că axa  $Ox$  este asimptotă orizontală spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că imaginea funcției  $f$  este intervalul  $(0, +\infty)$ .
2. Se consideră funcțiile  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^3 - x - 1}{x^2(x+1)}$  și  $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \frac{x^2 + 1}{x} - \ln(x+1)$ .
- 5p a) Arătați că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p b) Calculați  $\int_1^2 (x+1)f(x) dx$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $a$ ,  $a > 1$ , astfel încât  $\int_1^a f(x) dx = \frac{1}{2} - \ln \frac{a+1}{2}$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**   
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Test 14

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$(\sqrt{11} - \sqrt{5})(\sqrt{11} + \sqrt{5}) = 11 - 5 =$ $= 6 = (\sqrt{6})^2$ , deci numerele date sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	2p 3p
2.	$f(-x) = \ln \frac{1+(-x)}{1-(-x)} = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} =$ $= -\ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$ , pentru orice $x \in (-1, 1)$ , deci funcția $f$ este impară	3p 2p
3.	$4 \cdot 2^{2x} + 4 \cdot 2^x - 3 = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot 2^x - 1)(2 \cdot 2^x + 3) = 0$ Cum $2^x > 0$ , pentru orice număr real, obținem $2^x = \frac{1}{2}$ , deci $x = -1$	3p 2p
4.	Numărul de submulțimi ordonate cu 3 elemente ale mulțimii $\{1, 3, 5, 7\}$ este $A_4^3 =$ $= \frac{4!}{(4-3)!} = 4! = 24$	3p 2p
5.	$m_{BC} = 1$ și, cum $AD \parallel BC$ , obținem $m_{AD} = 1$ Ecuația dreptei $AD$ este $y + 2 = x + 1$ , deci $y = x - 1$	3p 2p
6.	$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$ , deci $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$ $\sin C = 2 \sin B$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & a \end{vmatrix} = -3a + 8 + 0 - 6 - 0 + 4a =$ $= -3a + 4a + 8 - 6 = a + 2$ pentru orice număr real $a$	2p 3p
b)	$\det(A(0)) = 2 \neq 0$ $A^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	2p 3p
c)	Pentru $a \neq -2$ , obținem $\det(A(a)) \neq 0$ , deci sistemul este Cramer Soluția sistemului de ecuații este $(1, -1, 0)$	2p 3p
2.a)	$x * (-2) = 5(x + 2)(-2 + 2) - 2 =$	3p

	$= 0 - 2 = -2$ , pentru orice număr real $x$	2p
b)	$f(x) * f(y) = 5(f(x)+2)(f(y)+2) - 2 = 5\left(\frac{e^x - 10}{5} + 2\right)\left(\frac{e^y - 10}{5} + 2\right) - 2 =$ $= 5 \cdot \frac{e^x}{5} \cdot \frac{e^y}{5} - 2 = \frac{e^{x+y} - 10}{5} = f(x+y)$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	3p 2p
c)	$x * x = 5(x+2)^2 - 2$ , $x * x * x = 25(x+2)^3 - 2$ $25(x+2)^3 - 2 = 23 \Leftrightarrow (x+2)^3 = 1$ , deci $x = -1$	2p 3p

**SUBIECTUL al III-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+5}} - 1 =$ $= \frac{2(x+2)}{2\sqrt{x^2+4x+5}} - 1 = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}} - 1$ , $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+4x+5} - x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+4x+5 - x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x^2+4x+5} + x + 2} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5} + x + 2} = 0$ , deci dreapta de ecuație $y = 0$ , adică axa $Ox$ , este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției $f$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x + 2 = \sqrt{x^2+4x+5} \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 4x + 5 \Rightarrow 4 = 5$ , fals, deci $f'(x) \neq 0$ , pentru orice număr real $x$ $f'$ are proprietatea lui Darboux, deci $f'$ are semn constant și, cum $f'(0) = \frac{2}{\sqrt{5}} - 1 < 0$ , obținem că $f'(x) < 0$ , pentru orice număr real $x$ , deci $f$ este descrescătoare și, cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ și $f$ este continuă, obținem $\text{Im } f = (0, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$F'(x) = \frac{2x \cdot x - x^2 - 1}{x^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x^2-1)(x+1) - x^2}{x^2(x+1)} =$ $= \frac{x^3 - x - 1}{x^2(x+1)} = f(x)$ , $x \in (0, +\infty)$ , deci funcția $F$ este o primitivă a funcției $f$	3p 2p
b)	$\int_1^2 (x+1)f(x) dx = \int_1^2 \frac{x^3 - x - 1}{x^2} dx = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \ln x + \frac{1}{x}\right) \Big _1^2 =$ $= 2 - \ln 2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \ln 1 + 1\right) = 1 - \ln 2$	3p 2p
c)	$\int_1^a f(x) dx = F(x) \Big _1^a = F(a) - F(1) = \frac{a^2+1}{a} - \ln(a+1) - 2 + \ln 2 = \frac{a^2+1}{a} - \ln \frac{a+1}{2} - 2$ $\frac{a^2+1}{a} - \ln \frac{a+1}{2} - 2 = \frac{1}{2} - \ln \frac{a+1}{2}$ , deci $\frac{a^2+1}{a} = \frac{5}{2}$ și, cum $a > 1$ , obținem $a = 2$	3p 2p