

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numerele $\log_3 5$, $\sqrt{2}$ și $\log_5 9$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p 2. Se consideră o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Demonstrați că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(-x)$ este impară.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 3^{\frac{1}{2}-x} = 1 + \sqrt{3}$.
- 5p 4. Determinați termenul care îl conține pe x^{10} din dezvoltarea $\left(x^3 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$, unde $x \in \mathbb{R}^*$.
- 5p 5. În planul triunghiului ABC se consideră punctul G , astfel încât $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Demonstrați că G este centrul de greutate al triunghiului ABC .
- 5p 6. Determinați $x \in (0, \pi)$, știind că $\sin 2x - 3\sin x - 2\cos x + 3 = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

- 5p a) Arătați că $\det A = 1$.
- 5p b) Demonstrați că, pentru orice număr real m , rangul matricei $M(m)$ este diferit de 2.
- 5p c) Determinați numărul real m , $m \neq 1$, știind că inversa matricei $M(m)$ este matricea A .
2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 + z_1 z_2$.
- 5p a) Arătați că $(1+i) \circ (2-i) = 6+i$.
- 5p b) Demonstrați că numărul $z \circ \bar{z}$ este număr real, pentru orice număr complex z .
- 5p c) Determinați numerele complexe z pentru care $z \circ z = -2$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(1) + f(2) + \dots + f(n) + 2 \ln n)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$.

- 5p a) Arătați că $\int_0^1 e^x f(x) dx = \frac{4}{3}$.

5p b) Calculați $\int_0^1 f(-x)dx$.

5p c) Determinați numerele reale a și b , știind că funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = e^{-x}(-x^2 + ax + b)$ este o primitivă a funcției f .

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\log_3 5 \cdot \log_5 9 = \log_3 5 \cdot (2 \log_5 3) = 2 =$ $= \sqrt{2}^2$, deci numerele $\log_3 5$, $\sqrt{2}$ și $\log_5 9$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	3p 2p
2.	$g(-x) = f(-x) - f(-(-x)) = f(-x) - f(x) =$ $= -(f(x) - f(-x)) = -g(x)$, deci funcția g este impară	2p 3p
3.	$3^x + \frac{\sqrt{3}}{3^x} = 1 + \sqrt{3} \Leftrightarrow 3^{2x} - (1 + \sqrt{3}) \cdot 3^x + \sqrt{3} = 0$ $(3^x - 1)(3^x - \sqrt{3}) = 0$, de unde obținem $x = 0$ sau $x = \frac{1}{2}$	2p 3p
4.	$T_{k+1} = C_{20}^k (x^3)^{20-k} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = C_{20}^k x^{3(20-k) - \frac{k}{3}} = C_{20}^k x^{60 - \frac{10k}{3}}$, unde $k \in \{0, 1, 2, \dots, 20\}$ $60 - \frac{10k}{3} = 10 \Leftrightarrow k = 15$, deci $T_{16} = C_{20}^{15} x^{10}$ îl conține pe x^{10}	3p 2p
5.	$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$, deci G este centrul de greutate al ΔABC	2p 3p
6.	$\sin x(2 \cos x - 3) - (2 \cos x - 3) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)(2 \cos x - 3) = 0$ Cum $2 \cos x - 3 \neq 0$ și $x \in (0, \pi)$, obținem $x = \frac{\pi}{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 0 + 0 - 1 - 0 - 1 =$ $= 3 - 2 = 1$	3p 2p
b)	$\det(M(m)) = (m-1)^2$, pentru orice număr real m Dacă $m = 1$, matricea $M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ are rangul 1, iar dacă $m \neq 1$, atunci $\det(M(m)) \neq 0$ și matricea $M(m)$ are rangul 3, deci, pentru orice număr real m , rangul matricei $M(m)$ este diferit de 2	2p 3p
c)	$M(m) \cdot A = I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2-m & m-1 & 0 \\ 2-m & 0 & m-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Obținem $m = 2$, care convine	3p 2p

2.a)	$(1+i) \circ (2-i) = 1+i+2-i+(1+i)(2-i) =$ $= 3+2-i+2i-i^2 = 6+i$	3p 2p
b)	Dacă $z = a+ib$, unde a și b sunt numere reale, atunci $z \circ \bar{z} = a+ib+a-ib+(a+ib)(a-ib) =$ $= 2a+a^2+b^2$, care este număr real, pentru orice număr complex z .	3p 2p
c)	$2z+z^2 = -2 \Leftrightarrow z^2+2z+2=0$ $\Delta = -4$, deci $z = -1-i$ sau $z = -1+i$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \cdot \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$ $= \frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} = \frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \ln 1 = 0$ Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$f(1)+f(2)+\dots+f(n)+2\ln n = \ln \frac{1}{3} + \ln \frac{3}{7} + \ln \frac{7}{13} + \dots + \ln \frac{n^2-n+1}{n^2+n+1} + 2\ln n =$ $= \ln \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{13} \cdot \dots \cdot \frac{n^2-n+1}{n^2+n+1} \right) + \ln(n^2) = \ln \frac{1}{n^2+n+1} + \ln(n^2) = \ln \frac{n^2}{n^2+n+1}$, pentru orice număr natural nenul n $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(1)+f(2)+\dots+f(n)+2\ln n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{n^2}{n^2+n+1} = \ln 1 = 0$	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 (x^2+1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} + 1 - 0 = \frac{4}{3}$	3p 2p
b)	$\int_0^1 f(-x) dx = \int_0^1 (x^2+1)e^x dx = (x^2+1)e^x \Big _0^1 - \int_0^1 2xe^x dx = 2e - 1 - 2(x-1)e^x \Big _0^1 =$ $= 2e - 1 - 0 + (-2) = 2e - 3$	3p 2p
c)	F este primitivă a lui $f \Rightarrow F'(x) = f(x) \Rightarrow -e^{-x}(-x^2+ax+b) + e^{-x}(-2x+a) = e^{-x}(x^2+1)$, pentru orice număr real x $x^2 - (a+2)x + a - b = x^2 + 1$, pentru orice număr real $x \Leftrightarrow a = -2$ și $b = -3$	2p 3p