

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 13

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\sqrt{16} - \sqrt{32} + \sqrt{18} + \sqrt{2} - 2^2 = 0$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + a^2$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a , pentru care $f(1) = 2$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x+1} = 3^4$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie impar.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ și $B(3,7)$. Determinați coordonatele simetricului punctului B față de punctul A .
- 5p 6. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, arătați că $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricile $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x) = B + xI_2$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det A = -5$.
- 5p b) Arătați că $A \cdot M(x) = M(x) \cdot A$, pentru orice număr real x .
- 5p c) Determinați numărul real x pentru care $A \cdot A - 3(A + M(x)) = I_2$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \frac{1}{3}xy + x + y$.
- 5p a) Arătați că $2020 * (-3) = -3$.
- 5p b) Determinați numerele reale x pentru care $(6 * x) * 6 = 6$.
- 5p c) Determinați numerele reale nenule x pentru care $x * \frac{1}{x} = -3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(x^2 - 3) + 3$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x^3}{x+1} = -3$.
- 5p c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + x + e^x$.
- 5p a) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - x - e^x) dx = \frac{2}{5}$.
- 5p b) Arătați că $\int_1^e (f(x) - x^4 - e^x) \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}$.
- 5p c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^a f(x) dx = \frac{5a^2 + 54}{10} + e^a$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 13

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\sqrt{16} - \sqrt{32} + \sqrt{18} + \sqrt{2} - 2^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{2} - 4 =$ $= (4 - 4) + (-4 + 3 + 1)\sqrt{2} = 0$	3p 2p
2.	$f(1) = 1 + a^2$, deci $1 + a^2 = 2$ $a^2 = 1$, deci $a = -1$ sau $a = 1$	2p 3p
3.	$3x + 1 = 4$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de o cifră sunt 5 numere impare, deci sunt 5 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	2p 2p 1p
5.	A este mijlocul segmentului BC , unde C este simetricul lui B față de A , deci $3 = \frac{3 + x_C}{2}$ și $1 = \frac{7 + y_C}{2}$ $x_C = 3$, $y_C = -5$	3p 2p
6.	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{1}{2}$ și, cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = (\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 =$ $= 4 - 9 = -5$	2p 3p
b)	$A \cdot M(x) = A \cdot (B + xI_2) = A \cdot B + xA$, $M(x) \cdot A = (B + xI_2) \cdot A = B \cdot A + xA$, pentru orice număr real x Cum $A \cdot B = B \cdot A$, obținem $A \cdot M(x) = M(x) \cdot A$, pentru orice număr real x	3p 2p
c)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}$, $A + M(x) = \begin{pmatrix} 2+x & 4 \\ 4 & 2+x \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot A - 3(A + M(x)) = \begin{pmatrix} 7-3x & 0 \\ 0 & 7-3x \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	3p

	$\begin{pmatrix} 7-3x & 0 \\ 0 & 7-3x \end{pmatrix} = I_2 \Leftrightarrow 7-3x=1$, de unde obținem $x=2$	2p
2.a)	$2020 * (-3) = \frac{1}{3} \cdot 2020 \cdot (-3) + 2020 + (-3) =$ $= -2020 + 2020 - 3 = -3$	3p 2p
b)	$6 * x = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot x + 6 + x = 3x + 6$, $(6 * x) * 6 = (3x + 6) * 6 = \frac{1}{3} (3x + 6) \cdot 6 + 3x + 6 + 6 = 9x + 24$ $9x + 24 = 6 \Leftrightarrow x = -2$	3p 2p
c)	$x * \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x} = \frac{1}{3} + x + \frac{1}{x} = \frac{3x^2 + x + 3}{3x}$, pentru orice număr real nenul x	3p
	$\frac{3x^2 + x + 3}{3x} = -3 \Leftrightarrow 3x^2 + 10x + 3 = 0$, de unde obținem $x = -3$ sau $x = -\frac{1}{3}$, care convin	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (x^3 - 3x + 3)' = 3x^2 - 3 =$ $= 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x^3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+3}{x+1} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -3$	2p 3p
c)	$f(0) = 3$, $f'(0) = -3$ Ecuația tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = -3x + 3$	2p 3p
2.a)	$\int_{-1}^1 (f(x) - x - e^x) dx = \int_{-1}^1 (x^4 + x + e^x - x - e^x) dx = \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big _{-1}^1 =$ $= \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$	3p 2p
b)	$\int_1^e (f(x) - x^4 - e^x) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$ $= \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big _1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$	3p 2p
c)	$\int_0^a (x^4 + x + e^x) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} + e^x \right) \Big _0^a = \frac{a^5}{5} + \frac{a^2}{2} + e^a - 1 = \frac{2a^5 + 5a^2 - 10}{10} + e^a$ $\frac{2a^5 + 5a^2 - 10}{10} + e^a = \frac{5a^2 + 54}{10} + e^a \Leftrightarrow 2a^5 = 64$, deci $a = 2$	3p 2p