

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că modulul numărului complex $z = \frac{1+2i}{1-2i}$ este egal cu 1.
- 5p 2. Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (\sqrt{2}+1)^x + (\sqrt{2}-1)^x$ este pară.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2} = x$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre divizibile cu 3.
- 5p 5. În triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$, ecuația mediatoarei laturii AC este $y = 3x + 1$ și ecuația perpendicularei din A pe BC este $2y = x + 7$. Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC .
- 5p 6. Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, știind că $\sin x \cos(\pi - x) - \sin(\pi - x) \cos x = -1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in (0, +\infty)$.
- 5p a) Arătați că $\det(A(a)) = 1$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Demonstrați că $A(a) \cdot A(b) = A(ab)$, pentru orice $a, b \in (0, +\infty)$.
- 5p c) Determinați $a \in (0, +\infty)$, astfel încât $A(a) \cdot A(a) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2020 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{1}{3}xy + x + y$.
- 5p a) Demonstrați că $x \circ y = \frac{1}{3}(x+3)(y+3) - 3$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 3$. Arătați că $f(xy) = f(x) \circ f(y)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Demonstrați că $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = \frac{(x_1+3)(x_2+3) \dots (x_n+3) - 3^n}{3^{n-1}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și orice numere reale x_1, x_2, \dots, x_{n-1} și x_n .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 2$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două asimptote ale graficului funcției f .

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} \right) dx = \frac{1}{3}$.

5p b) Calculați $\int_0^4 (f(x) - f(-x)) dx$.

5p c) Determinați numărul real a , $a > 4$, astfel încât $\int_4^a \frac{f(x)}{x} dx = 10 + \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + 9}}{9}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$ z = \frac{ 1+2i }{ 1-2i } = \frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} =$ $= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$	3p
		2p
2.	$f(-x) = (\sqrt{2}+1)^{-x} + (\sqrt{2}-1)^{-x} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^x + \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^x =$ $= (\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x = f(x), \text{ pentru orice număr real } x, \text{ deci funcția } f \text{ este pară}$	3p
		2p
3.	$x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$ $x = -1, \text{ care nu convine, sau } x = 2, \text{ care convine}$	3p
		2p
4.	<p>Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile</p> <p>Numerelor naturale de două cifre care au ambele cifre divizibile cu 3 sunt \overline{ab} cu $a \in \{3,6,9\}$ și $b \in \{0,3,6,9\}$, deci sunt 12 cazuri favorabile</p> $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$	2p
		2p
		1p
5.	<p>Perpendiculara din A pe BC este și mediatoarea lui BC, deci coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC sunt soluțiile sistemului</p> $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ 2y = x + 7 \end{cases}$ $x = 1, y = 4$	3p
		2p
6.	$\cos(\pi - x) = -\cos x, \sin(\pi - x) = \sin x$ $-\sin x \cos x - \sin x \cos x = -1 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \text{ și, cum } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ obținem } x = \frac{\pi}{4}$	2p
		3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot \ln a =$ $= 1 - 0 = 1, \text{ pentru orice } a \in (0, +\infty)$	2p
		3p
b)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a + \ln b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & \ln(ab) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(ab), \text{ pentru orice } a, b \in (0, +\infty)$	3p
		2p

c)	$A(a) \cdot A(a) \cdot A(a) = A(a^3) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a^3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$	2p
	$\begin{pmatrix} 1 & \ln a^3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2020 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \ln a^3 = 2020 \Leftrightarrow \ln a = \frac{2020}{3} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{e^{2020}}$, care convine	3p
2.a)	$x \circ y = \frac{1}{3}xy + x + y + 3 - 3 = \frac{1}{3}x(y+3) + (y+3) - 3 =$	2p
	$= (y+3)\left(\frac{1}{3}x+1\right) - 3 = \frac{1}{3}(x+3)(y+3) - 3$, pentru orice numere reale x și y	3p
b)	$f(x) \circ f(y) = \frac{1}{3}(f(x)+3)(f(y)+3) - 3 = \frac{1}{3}(3x-3+3)(3y-3+3) - 3 =$	2p
	$= 3xy - 3 = f(xy)$, pentru orice numere reale x și y	3p
c)	$f\left(\frac{x+3}{3}\right) = 3 \cdot \frac{x+3}{3} - 3 = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $x_k = f\left(\frac{x_k+3}{3}\right)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$	2p
	$x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = f\left(\frac{x_1+3}{3}\right) \circ f\left(\frac{x_2+3}{3}\right) \circ \dots \circ f\left(\frac{x_n+3}{3}\right) = f\left(\frac{(x_1+3)(x_2+3) \dots (x_n+3)}{3^n}\right) =$ $= 3 \cdot \frac{(x_1+3)(x_2+3) \dots (x_n+3)}{3^n} - 3 = \frac{(x_1+3)(x_2+3) \dots (x_n+3) - 3^n}{3^{n-1}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și orice numere reale x_1, x_2, \dots, x_{n-1} și x_n	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} =$	3p
	$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$, $x \in (1, +\infty)$	2p
b)	$f(2) = \sqrt{3}$, $f'(2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	2p
	Ecuția tangentei este $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, adică $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{5}{\sqrt{3}}$	3p
c)	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty$, deci dreapta de ecuație $x = 1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	2p
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 1$, deci dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f , de unde obținem că punctul de intersecție a celor două asimptote este $(1, 1)$	3p
2.a)	$\int_0^1 \left(f(x) - \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \right) dx = \int_0^1 x^2 dx =$	2p
	$= \frac{x^3}{3} \Big _0^1 = \frac{1}{3}$	3p

b)	$f(x) - f(-x) = x^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - (-x)^2 - \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+9}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}, \text{ pentru orice număr real } x$	2p
	$\int_0^4 (f(x) - f(-x)) dx = \int_0^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}} dx = 2\sqrt{x^2+9} \Big _0^4 = 2(5-3) = 4$	3p
c)	$\int_4^a \frac{f(x)}{x} dx = \int_4^a \left(x + \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln(x + \sqrt{x^2+9}) \right) \Big _4^a = \frac{a^2-16}{2} + \ln \frac{a + \sqrt{a^2+9}}{9}$	3p
	$\frac{a^2-16}{2} = 10 \text{ și, cum } a > 4, \text{ obținem } a = 6$	2p