

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = 2$ și $b_3 - 4b_2 = -8$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m , știind că punctul $A(f(1), 1)$ aparține graficului funcției f .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{x^2 - 1}{\sqrt{x - 1}} = \sqrt{x + 1}$.
- 5p 4. Determinați numărul numerelor naturale de trei cifre care au proprietatea că pătratul cifrei zecilor este egal cu diferența dintre cifra unităților și cifra sutelor.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 1)$ și $H(3, 2)$. Știind că H este ortocentrul triunghiului ABC , determinați panta dreptei BC .
- 5p 6. Determinați $x \in (0, \pi)$, știind că $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 0$.
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.
- 5p c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele necoliniare $A(1, 1)$, $B(m, m^2)$ și $C(m+1, (m+1)^2)$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m , știind că triunghiul ABC are aria egală cu 1.
2. Pe mulțimea $G = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = 2^{\ln x \cdot \ln y}$.
- 5p a) Arătați că $x * 1 = 1$, pentru orice $x \in G$.
- 5p b) Determinați $f \in G$, știind că f este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Determinați $x \in G$ pentru care $x * \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(e^x + x - 1)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x-2}{e^x + x - 1}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Demonstrați că dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Determinați imaginea funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = 1 + \ln(1 + \sqrt{2})$.

5p b) Calculați $\int_{-1}^1 |x f(x)| dx$.

5p c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = 2$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_2 = b_1q = 2q$ și $b_3 = b_1q^2 = 2q^2$, unde q este rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ $q^2 - 4q + 4 = 0$, deci $q = 2$	2p 3p
2.	$A(f(1), 1)$ aparține graficului funcției $f \Leftrightarrow f(f(1)) = 1$ $f(1) + m = 1 \Leftrightarrow 2m + 1 = 1$, deci $m = 0$	2p 3p
3.	$x^2 - 1 = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 = 0$ sau $x^2 - 1 = 1$ $x = -\sqrt{2}$, care nu convine, sau $x = -1$, care nu convine, sau $x = 1$, care nu convine, sau $x = \sqrt{2}$, care convine	2p 3p
4.	$b^2 = c - a$, unde \overline{abc} sunt numerele cu proprietatea dată și, cum $c \leq 9$ și $a \geq 1$, obținem $b^2 \leq 8$, deci $b \in \{0, 1, 2\}$ Pentru $b = 0$, obținem $c = a$, deci sunt 9 numere, pentru $b = 1$, obținem $c = a + 1$, deci sunt 8 numere, iar pentru $b = 2$, obținem $c = a + 4$, deci sunt 5 numere; în total sunt 22 de numere cu proprietatea cerută	2p 3p
5.	Panta dreptei AH este $m_{AH} = \frac{1}{3}$ H este ortocentrul $\triangle ABC$, deci $AH \perp BC \Rightarrow m_{AH} \cdot m_{BC} = -1$, de unde obținem $m_{BC} = -3$	2p 3p
6.	$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = 2 \Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 2$ $2\sin x \cos x = -1$, deci $\sin 2x = -1$ și, cum $x \in (0, \pi)$, obținem $2x = \frac{3\pi}{2}$, deci $x = \frac{3\pi}{4}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 1 - 0 - 1 - 0 = 0$	2p 3p
b)	$\det(A(m)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{vmatrix} = m(m-1)$, pentru orice număr real m Matricea $A(m)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(m)) \neq 0$, deci $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$	2p 3p
c)	$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \Delta $, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{vmatrix} = m(m-1)$ $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = 1 \Leftrightarrow m(m-1) = 2$, deci $m^2 - m = -2$, care nu convine, sau $m^2 - m = 2$, de unde obținem $m = -1$ sau $m = 2$, care convin	2p 3p

2.a)	$x * 1 = 2^{\ln x \cdot \ln 1} =$ $= 2^{\ln x \cdot 0} = 2^0 = 1$, pentru orice $x \in G$	3p 2p
b)	$x * f = x \Leftrightarrow 2^{\ln x \cdot \ln f} = x \Leftrightarrow \ln x \cdot \ln f \cdot \ln 2 = \ln x$, pentru orice $x \in G$, deci $\ln f \cdot \ln 2 = 1$, de unde obținem $\ln f = \frac{1}{\ln 2}$, deci $f = e^{\frac{1}{\ln 2}} \in G$ $e^{\frac{1}{\ln 2}} * x = 2^{\ln e^{\frac{1}{\ln 2}} \cdot \ln x} = 2^{\frac{1}{\ln 2} \cdot \ln x} = x$, pentru orice $x \in G$, deci $f = e^{\frac{1}{\ln 2}}$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	3p 2p
c)	$x * \frac{1}{x} = 2^{\ln x \cdot \ln \frac{1}{x}} = 2^{-\ln^2 x}$, pentru orice $x \in G$ $2^{-\ln^2 x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln^2 x = 1$, de unde obținem $\ln x = -1$ sau $\ln x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$ sau $x = e$, care convin	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 1 - \frac{e^x + 1}{e^x + x - 1} =$ $= \frac{e^x + x - 1 - e^x - 1}{e^x + x - 1} = \frac{x - 2}{e^x + x - 1}$, $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln e^x - \ln(e^x + x - 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x}{e^x + x - 1} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{1 + \frac{x-1}{e^x}} = \ln 1 = 0$, deci dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$, $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (0, 2] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0, 2]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [2, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[2, +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $f(2) = 2 - \ln(e^2 + 1)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ și f este continuă pe $(0, +\infty)$, deci imaginea funcției f este $[2 - \ln(e^2 + 1), +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) dx = \left(x + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})\right) \Big _0^1 =$ $= 1 + \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln 1 = 1 + \ln(1 + \sqrt{2})$	3p 2p
b)	$\int_{-1}^1 xf(x) dx = \int_{-1}^0 -x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) dx + \int_0^1 x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) dx = \left(-\frac{x^2}{2} - \sqrt{x^2 + 1}\right) \Big _{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} + \sqrt{x^2 + 1}\right) \Big _0^1 =$ $= 0 - 1 + \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2} - 1$	3p 2p
c)	Din regula lui l'Hospital, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = 2$	3p 2p