Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 12

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(\frac{2}{3}\right)^2:\frac{1}{3}-3:9=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-9$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-4x+8}=x$.

5p **4.** După o ieftinire cu 8%, un produs costă 184 de lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,3)$, $B(4,1)$, C și D. Știind că punctele C și B sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv CD, determinați coordonatele punctului D.

5p **6.** Se consideră $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\sin x$. Arătați că $\sin x=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A=\begin{pmatrix}3&6\\1&2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A=5A$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $\det\left(xA+(1-x)I_2\right)\geq 0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3xy-x^2-y^2$.

5p **a)** Arătați că $1*2=1$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $2*x=1$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(\sqrt[3]{x}*\sqrt[3]{x}\right)*\sqrt[3]{x^2}=1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-\frac{x}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=24$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1\left(f(x)-1\right)dx$.

5p **c)** Arătați că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $[0,+\infty)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 12

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\frac{2}{3}\right)^2:\frac{1}{3}-3:9=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{1}-3\cdot\frac{1}{9}=$	**3p**
	$=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$	**2p**
2.	$f(x)=0\Leftrightarrow 3x-9=0$	**3p**
	$x=3$	**2p**
3.	$\sqrt{x^2-4x+8}=x\Rightarrow x^2-4x+8=x^2$	**2p**
	$-4x+8=0$, de unde obținem $x=2$, care convine	**3p**
4.	$x-\frac{8}{100}\cdot x=184$	**3p**
	$x=200$ de lei	**2p**
5.	$C(1,2)$	**2p**
	$4=\frac{1+x_D}{2}$, $1=\frac{2+y_D}{2}$, unde (x_D,y_D) sunt coordonatele punctului D, deci $x_D=7$ și $y_D=0$	**3p**
6.	$\text{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\Rightarrow\cos x=\sqrt{3}\sin x$	**2p**
	$\sin^2 x+\left(\sqrt{3}\sin x\right)^2=1\Leftrightarrow\sin^2 x=\frac{1}{4}$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{1}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 2-6\cdot 1=$	**3p**
	$=6-6=0$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+6 & 18+12\\ 3+2 & 6+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 30\\ 5 & 10\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=5\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}=5A$	**2p**
c)	$xA+(1-x)I_2=\begin{pmatrix}2x+1 & 6x\\ x & x+1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(xA+(1-x)I_2\right)=-4x^2+3x+1$, pentru orice număr real x	**3p**
	$-4x^2+3x+1\geq 0$, de unde obținem $x\in\left[-\frac{1}{4},1\right]$	**2p**
2.a)	$1*2=3\cdot 1\cdot 2-1^2-2^2=$	**3p**
	$=6-1-4=1$	**2p**

b)	$2*x=6x-4-x^2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$6x-4-x^2=1\Leftrightarrow x^2-6x+5=0$, de unde obținem $x=1$ sau $x=5$	**3p**
c)	$\sqrt[3]{x}*\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x^2}\Rightarrow\left(\sqrt[3]{x}*\sqrt[3]{x}\right)*\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x^4}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\sqrt[3]{x^4}=1\Leftrightarrow x^4=1$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2-\dfrac{x+2-x}{(x+2)^2}=\dfrac{2x^2+8x+6}{(x+2)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{2\left(x^2+4x+3\right)}{(x+2)^2}=\dfrac{2(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$	**2p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-2,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-2,-1]$, $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,+\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{x+2}\right)=2$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x}{x+2}\right)=-1$, deci dreapta de ecuație $y=2x-1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^3\left(x^2+1\right)f(x)dx=\int\limits_0^3\left(x^2+5\right)dx=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}+5x\right)\right\|_0^3=$	**3p**
	$=9+15=24$	**2p**
b)	$\int\limits_0^1\left(f(x)-1\right)dx=\int\limits_0^1\dfrac{4}{x^2+1}dx=4\operatorname{arctg}x\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=4\operatorname{arctg}1-4\operatorname{arctg}0=\pi$	**2p**
c)	F este primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F''(x)=f'(x)=\dfrac{-8x}{\left(x^2+1\right)^2}\le 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci F este concavă pe $[0,+\infty)$	**3p**