

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați partea întreagă a numărului $a = \frac{4}{\sqrt{2}}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + 1$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m , știind că axa Ox este tangentă la graficul funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{(x-1)(x+2)} = (x+2)\sqrt{x-1}$.
- 5p** 4. Determinați numărul natural n , $n \geq 2$, știind că mulțimea $\{3, 4, 5, \dots, n+2\}$ are exact 55 de submulțimi cu 2 elemente.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1 și d_2 , de ecuații $2x - y + 1 = 0$, respectiv $x + y + 2 = 0$. Determinați ecuația dreptei d care este perpendiculară pe dreapta d_2 și trece prin punctul de intersecție a dreptelor d_1 și d_2 .
- 5p** 6. Arătați că $\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m, x) = \begin{pmatrix} 2 & -x & 1 \\ 1 & m & 3 \\ 3 & -2 & x \end{pmatrix}$, unde m și x sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(4, 2)) = 0$.
- 5p** b) Determinați rangul matricei $A(2, 1)$.
- 5p** c) Determinați perechile de numere naturale nenule și distincte (n, p) pentru care $\det(A(3, n)) = \det(A(3, p))$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x * y = \frac{xy}{3} - x - y + 6$.
- 5p** a) Arătați că $(-1) * 3 = 3$.
- 5p** b) Arătați că $x * (y + z - 3) = (x * y) + (x * z) - 3$, pentru orice numere reale x , y și z .
- 5p** c) Determinați numerele reale x , $x \neq 3$ pentru care $(x * (x + x' - 3)) + (x' * (2x - 3)) = 42$, unde x' este simetricul lui x în raport cu legea de compoziție „*”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - ax$, unde a este număr real.
- 5p** a) Pentru $a = 0$, arătați că $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = \sqrt{2}$, situat pe graficul funcției f , este paralelă cu axa Ox .
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice număr real a , graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x$.

5p a) Arătați că $\int_1^3 \frac{x f(x)}{\operatorname{arctg} x} dx = 20$.

5p b) Arătați că $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{f(x)}{x} dx = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

5p c) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f^n(x) dx = 0$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a = 2\sqrt{2}$ Cum $\sqrt{4} < \sqrt{8} < \sqrt{9}$, deci $2 < a < 3$, obținem că $[a] = 2$	2p 3p
2.	Axa Ox este tangentă la graficul funcției $f \Rightarrow \Delta = 0$ $m^2 - 4 = 0$, deci $m = -2$ sau $m = 2$	2p 3p
3.	$(x-1)(x+2) = (x-1)(x+2)^2 \Rightarrow (x-1)(x+2)(x+1) = 0$ $x = -2$, care nu convine; $x = -1$, care nu convine; $x = 1$, care convine	2p 3p
4.	$C_n^2 = 55 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 55 \Rightarrow n^2 - n - 110 = 0$ Cum n este număr natural, $n \geq 2$, obținem $n = 11$	3p 2p
5.	Punctul de intersecție a dreptelor d_1 și d_2 este punctul $M(-1, -1)$ $m_{d_2} = -1$ și, cum $m_d \cdot m_{d_2} = -1$, obținem $m_d = 1$, deci ecuația dreptei d este $y = x$	2p 3p
6.	$\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} = 2 \sin \frac{\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}}{2} \cos \frac{\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} =$ $= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(4,2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(4,2)) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$ $= 16 + (-2) + (-18) - 12 - (-12) - (-4) = 0$	2p 3p
b)	$A(2,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2,1)) = 0 \Rightarrow \text{rang}(A(2,1)) \leq 2$ Cum $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, obținem că rangul matricei $A(2,1)$ este egal cu 2	3p 2p
c)	$n^2 - 3n + 1 = p^2 - 3p + 1 \Leftrightarrow (n-p)(n+p-3) = 0$ Cum n și p sunt numere naturale nenule și distincte, obținem $n + p = 3$, iar perechile sunt $(1,2)$ și $(2,1)$	2p 3p
2.a)	$(-1) * 3 = \frac{-3}{3} - (-1) - 3 + 6 =$ $= -1 + 1 - 3 + 6 = 3$	3p 2p

b)	$x*(y+z-3) = \frac{x(y+z-3)}{3} - x - (y+z-3) + 6 = \frac{xy+xz}{3} - 2x - y - z + 9 =$ $= \frac{xy}{3} - x - y + 6 + \frac{xz}{3} - x - z + 6 - 3 = (x*y) + (x*z) - 3, \text{ pentru orice numere reale } x, y \text{ și } z$	2p 3p
c)	<p>$x*6 = 6*x = x$, pentru orice număr real x, deci $e=6$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”, de unde obținem că $x*x' = x'*x = 6$, unde x' este simetricul lui x în raport cu legea de compoziție „*”</p> <p>Deoarece $2x-3 = x+x-3$ și $x*(y+z-3) = (x*y) + (x*z) - 3$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$, obținem $(x*x) + (x*x') - 3 + (x'*x) + (x'*x) - 3 = 42 \Leftrightarrow (x*x) + 6 - 3 + 6 + 6 - 3 = 42$, deci $x*x = 30 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - 2x + 6 = 30$, de unde obținem $x = -6$ sau $x = 12$, care convin</p>	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f(x) = \sqrt{x^2+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \cdot (x^2+2)' =$ $= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	<p>Tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = \sqrt{2}$, situat pe graficul funcției f, este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(\sqrt{2}) = 0$</p> <p>Cum $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - a$, pentru orice număr real a, obținem că $\frac{\sqrt{2}}{2} - a = 0$, deci $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$</p>	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2} - ax}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - a \right)}{x} = 1 - a, \text{ pentru orice număr real } a$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (1-a)x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+2} + x} = 0, \text{ deci, pentru orice număr real } a, \text{ dreapta de ecuație } y = (1-a)x \text{ este asimptotă spre } +\infty \text{ la graficul funcției } f$	3p 2p
2.a)	$\int_1^3 \frac{x f(x)}{\arctg x} dx = \int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big _1^3 =$ $= \frac{81-1}{4} = 20$	3p 2p
b)	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} (x^2+1)' \arctg x dx = \frac{x^2+1}{2} \arctg x \Big _1^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1}{x^2+1} dx = 2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} 1 dx =$ $= \frac{5\pi}{12} - \frac{1}{2} x \Big _1^{\sqrt{3}} = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$	3p 2p
c)	<p>Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $x \in [0,1]$, $0 \leq x^{2n} \leq 1$ și $0 \leq \arctg x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq \arctg^n x \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$,</p> <p>de unde obținem că $0 \leq \int_0^1 f^n(x) dx \leq \int_0^1 \left(\frac{\pi}{4}\right)^n dx = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$</p> <p>Cum $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n = 0$, obținem că $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f^n(x) dx = 0$</p>	3p 2p