

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*

Test 12

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} : 0,5\right) \cdot \frac{12}{13} = 1$ .
- 5p 2. Arătați că  $2(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 4$ , unde  $x_1$  și  $x_2$  sunt soluțiile ecuației  $x^2 - 7x + 10 = 0$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{5x+1} = 6$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 11.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(6,0)$  și  $B(0,8)$ . Determinați lungimea înălțimii din vârful  $O$  al triunghiului  $AOB$ .
- 5p 6. Calculați lungimea laturii  $AB$  a triunghiului  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , știind că  $BC = 5\sqrt{2}$  și  $m(\sphericalangle B) = 45^\circ$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p a) Arătați că  $\det A = 1$ .
- 5p b) Arătați că  $2A - A \cdot A = I_2$ .
- 5p c) Determinați numerele reale  $x$ ,  $y$  și  $z$ , pentru care  $A \cdot \begin{pmatrix} x-2 & y \\ z+1 & 1 \end{pmatrix} - I_2 = O_2$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy + x^2 + y^2 - 1$ .
- 5p a) Arătați că  $1 \circ (0 \circ 2) = 12$ .
- 5p b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x \circ (-x) = 3$ .
- 5p c) Determinați perechile  $(m, n)$  de numere naturale pentru care  $m \circ n = -mn$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ .
- 5p c) Demonstrați că funcția  $f$  este convexă pe  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + x^2 + 3x$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_{-1}^1 (f(x) - x^2 - 3x) dx = 0$ .

**5p** b) Arătați că  $\int_0^1 (f(x) - x^3 - x^2) e^x dx = 3$ .

**5p** c) Se consideră funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , primitiva funcției  $f$  pentru care  $F(0) = 1$ . Demonstrați că

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{F^2(x)} dx = \frac{25}{37}.$$

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{tehnologic}$**   
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Test 12

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}; 0,5\right) \cdot \frac{12}{13} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1\right) \cdot \frac{12}{13} = \left(\frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12}\right) \cdot \frac{12}{13} =$ $= \frac{13}{12} \cdot \frac{12}{13} = 1$	3p 2p
2.	$x_1 + x_2 = 7, x_1 x_2 = 10$ $2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 = 2 \cdot 7 - 10 = 4$	2p 3p
3.	$5x + 1 = 36$ $x = 7$ , care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele de două cifre care sunt multipli de 11 sunt 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 și 99, deci sunt 9 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	2p 2p 1p
5.	$AO = 6, BO = 8, AB = 10$ $h = \frac{AO \cdot BO}{AB} = \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{24}{5} = 4,8$	3p 2p
6.	$\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{5\sqrt{2}}$ $AB = 5$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2) =$ $= 1 - 0 = 1$	3p 2p
b)	$2A - A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	3p 2p
c)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 & y \\ z+1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3 & y \\ -2x+z+5 & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x = 3, y = 0, z = 1$	2p 3p
2.a)	$0 \circ 2 = 0 \cdot 2 + 0^2 + 2^2 - 1 = 3$ $1 \circ (0 \circ 2) = 1 \circ 3 = 1 \cdot 3 + 1^2 + 3^2 - 1 = 12$	3p 2p

<b>b)</b>	$x \circ (-x) = x \cdot (-x) + x^2 + (-x)^2 - 1 = -x^2 + x^2 + x^2 - 1 = x^2 - 1$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b>
	$x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$ , de unde obținem $x = -2$ sau $x = 2$	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$mn + m^2 + n^2 - 1 = -mn \Leftrightarrow m^2 + n^2 + 2mn = 1 \Leftrightarrow (m+n)^2 = 1$	<b>3p</b>
	Cum $m$ și $n$ sunt numere naturale, obținem $(0,1)$ și $(1,0)$	<b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} =$	<b>3p</b>
	$= \frac{2x \cdot (x^2 + 1 - x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2 + 1} =$	<b>3p</b>
	$= \frac{2}{2} = 1$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$f''(x) = \frac{4(1-3x^2)}{(x^2 + 1)^3}, x \in \mathbb{R}$	<b>2p</b>
	$f''(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ , deci funcția $f$ este convexă pe $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$	<b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_{-1}^1 (f(x) - x^2 - 3x) dx = \int_{-1}^1 (x^3 + x^2 + 3x - x^2 - 3x) dx = \int_{-1}^1 x^3 dx =$	<b>2p</b>
	$= \frac{x^4}{4} \Big _{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$	<b>3p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 (f(x) - x^3 - x^2) e^x dx = \int_0^1 (x^3 + x^2 + 3x - x^3 - x^2) e^x dx = 3 \int_0^1 x e^x dx = 3(x-1)e^x \Big _0^1 =$	<b>3p</b>
	$= 3$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c, c \in \mathbb{R}$ și, cum $F(0) = 1 \Rightarrow c = 1$ , deci $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 1$	<b>3p</b>
	$\int_0^1 \frac{f(x)}{F^2(x)} dx = \int_0^1 \frac{F'(x)}{F^2(x)} dx = -\frac{1}{F(x)} \Big _0^1 = -\frac{1}{F(1)} + \frac{1}{F(0)} = -\frac{12}{37} + 1 = \frac{25}{37}$	<b>2p</b>