

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_{șt-nat}

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați termenul a_2 al unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_1 + 2a_2 + a_3 = 4$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 6$. Arătați că numărul $f(3) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)$ este natural.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(4-x) = 3 - \log_5(24-x)$.
- 5p 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi care are exact 45 submulțimi cu două elemente.
- 5p 5. Se consideră vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$. Determinați numărul real a , știind că vectorii $\vec{u} - \vec{v}$ și $3\vec{v}$ sunt coliniari.
- 5p 6. Un triunghi dreptunghic are catetele de lungime 6, respectiv 8. Determinați raza cercului înscris în acest triunghi.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 5-a & 10 \\ -2 & -4-a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 0$.
- 5p b) Determinați numărul real a , știind că $A(a) \cdot A(a) = A(0)$.
- 5p c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A(-1) \cdot X = A(0)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3x - 2y + 1$.
- 5p a) Arătați că $5 * 8 = 0$.
- 5p b) Determinați numărul real x pentru care $2020^x * 2020^x = 2$.
- 5p c) Demonstrați că există o infinitate de perechi (m, n) de numere întregi pentru care $m * n = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a , tangentele la graficul funcției f în punctele $A(a, f(a))$ și $B(-a, f(-a))$ sunt paralele.
- 5p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{\ln x}$.
2. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2\ln(2x+1)$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 2\ln(2x+1)) dx = \frac{1}{2}$.
- 5p b) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p c) Dacă F este o primitivă a funcției f , arătați că $F(\pi) \leq F\left(\frac{16}{5}\right)$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_1 + a_3 = 2a_2$, deci $a_1 + 2a_2 + a_3 = 4a_2$ $a_2 = 1$	3p 2p
2.	$f(3) = 3^2 + 3 + 6 = 18$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 6 = \frac{58}{9}$ $f(3) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) = 18 \cdot \frac{58}{9} = 116$, care este număr natural	2p 3p
3.	$\log_5((4-x)(24-x)) = 3 \Rightarrow (4-x)(24-x) = 125 \Rightarrow x^2 - 28x - 29 = 0$ $x = -1$, care convine, sau $x = 29$, care nu convine	3p 2p
4.	Mulțimea are $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ submulțimi cu două elemente, unde n este numărul de elemente ale mulțimii, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, deci $\frac{n(n-1)}{2} = 45$, de unde obținem $n^2 - n - 90 = 0$ Cum n este număr natural, $n \geq 2$, obținem $n = 10$	2p 2p
5.	$\vec{u} - \vec{v} = (a-1)\vec{i} + 4\vec{j}$, $3\vec{v} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ Vectorii $\vec{u} - \vec{v}$ și $3\vec{v}$ sunt coliniari, deci $\frac{a-1}{3} = -\frac{4}{3}$, de unde obținem $a = -3$	2p 3p
6.	Triunghiul are ipotenuza egală cu 10 și aria $S = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$ $r = \frac{S}{p} = \frac{24}{12} = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} =$ $= 5 \cdot (-4) - 10 \cdot (-2) = 0$	2p 3p
b)	$A(a) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 5-10a+a^2 & 10-20a \\ -2+4a & -4+8a+a^2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a $\begin{pmatrix} 5-10a+a^2 & 10-20a \\ -2+4a & -4+8a+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 0$	3p 2p
c)	$A(-1) = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-1)) = 2 \neq 0$, deci $A(-1)$ este inversabilă și $(A(-1))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	3p

	$X = (A(-1))^{-1} \cdot A(0)$, de unde obținem $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$	2p
2.a)	$5 \cdot 8 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 8 + 1 =$ $= 15 - 16 + 1 = 0$	3p 2p
b)	$3 \cdot 2020^x - 2 \cdot 2020^x + 1 = 2 \Leftrightarrow 2020^x = 1$ $x = 0$	2p 3p
c)	De exemplu, pentru $m = 2k - 1$ și $n = 3k - 1$, unde $k \in \mathbb{Z}$, obținem $m * n = (2k - 1) * (3k - 1) =$ $= 3(2k - 1) - 2(3k - 1) + 1 = 6k - 3 - 6k + 2 + 1 = 0$, deci există o infinitate de perechi (m, n) de numere întregi pentru care $m * n = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) =$ $= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ are panta $f'(a) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$ Tangenta la graficul funcției f în punctul $B(-a, f(-a))$ are panta $f'(-a) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$ și, cum, pentru orice număr real nenul a , $f'(-a) = f'(a)$, obținem că tangentele la graficul funcției f în punctele $A(a, f(a))$ și $B(-a, f(-a))$ sunt paralele	2p 3p
c)	$f(x) - f(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 2 \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = 2f(x)$, pentru orice număr real x $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x)}{\ln x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{(\ln x)'} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 2$	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 (x + 2 \ln(2x + 1) - 2 \ln(2x + 1)) dx = \int_0^1 x dx =$ $= \frac{x^2}{2} \Big _0^1 = \frac{1}{2}$	2p 3p
b)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x + 2 \ln(2x + 1)) dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^1 + \int_0^1 (2x + 1)' \ln(2x + 1) dx =$ $= \frac{1}{2} + (2x + 1) \ln(2x + 1) \Big _0^1 - \int_0^1 2 dx = \frac{1}{2} + 3 \ln 3 - 2 = 3 \ln 3 - \frac{3}{2}$	3p 2p
c)	$F'(x) = f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, deci funcția F este crescătoare pe $[0, +\infty)$ Cum $\pi < 3, 2 = \frac{16}{5}$, obținem $F(\pi) \leq F\left(\frac{16}{5}\right)$	3p 2p