

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $N = (\sqrt{5} + \sqrt{13})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{13})^2$ este pătratul unui număr natural.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că $(f \circ f)(1) + f(1) = 1$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x + 4^{1-x} = 4$.
- 5p 4. Determinați numărul numerelor naturale de trei cifre distincte care se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{0, 5, 7\}$.
- 5p 5. Se consideră punctul G , centrul de greutate al triunghiului ABC și punctul M , mijlocul segmentului AG . Demonstrați că $6\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$.
- 5p 6. Calculați măsura unghiului A al triunghiului ascuțitunghic ABC , știind că $4\mathcal{A}_{ABC} = AB \cdot AC$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ a+4 & a+3 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = -15$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care rangul matricei $A(a)$ nu este egal cu 3.
- 5p c) Demonstrați că matricea $M = A(-1) \cdot A(-1) \cdot A(-1) \cdot A(-1)$ are toate elementele numere întregi, divizibile cu 25.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 2020}$.
- 5p a) Arătați că $x * (-x) = \sqrt[3]{2020}$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Determinați numerele reale x pentru care $(x+1) * (-x) = \sqrt[3]{2021}$.
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice număr real a , există un unic număr real x pentru care $x * x * x = a$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p c) Demonstrați că funcția f este concavă pe $(-\infty, 2]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) \cdot \sqrt{x^2+3x+5} dx = 4$.

5p b) Calculați $\int_{-4}^1 f(x) dx$.

5p c) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx = 6 - 2\sqrt{5}$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$N = 5 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{13} + 13 + 5 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{13} + 13 =$ $= 36 = 6^2$	3p 2p
2.	$f(f(1)) + f(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) + a + 1 + a = 1 \Leftrightarrow 3a + 2 = 1$ $a = -\frac{1}{3}$	3p 2p
3.	$4^x + \frac{4}{4^x} = 4 \Leftrightarrow 4^{2x} - 4 \cdot 4^x + 4 = 0 \Leftrightarrow (4^x - 2)^2 = 0$ $2^{2x} = 2$, deci $x = \frac{1}{2}$	3p 2p
4.	Cifra sutelor se poate alege în 2 moduri și pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în 2 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei sutelor și a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege într-un singur mod, deci se pot forma $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ numere cu proprietatea cerută	2p 3p
5.	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$, unde D este mijlocul segmentului BC G este centrul de greutate al triunghiului ABC , deci $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ și, cum $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$, obținem $6\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$	2p 3p
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2}$, deci $\sin A = \frac{1}{2}$ Cum ΔABC este ascuțitunghic, obținem $m(\sphericalangle A) = 30^\circ$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 + (-6) + 8 - 8 - 9 - 0 = -15$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ a+4 & a+3 & a \end{vmatrix} = -15(a+1)$, pentru orice număr real a Rangul matricei $A(a)$ nu este egal cu 3 $\Leftrightarrow \det(A(a)) = 0$, deci $a = -1$	2p 3p
c)	$A(-1)A(-1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & -5 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 5B$, unde $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $M = 5^2 B \cdot B$ și, cum matricea $B \cdot B$ are toate elementele numere întregi, obținem că matricea M are toate elementele numere întregi, divizibile cu 25	3p 2p

2.a)	$x * (-x) = \sqrt[3]{x^3 + (-x)^3 + 2020} =$ $= \sqrt[3]{x^3 - x^3 + 2020} = \sqrt[3]{2020}$, pentru orice număr real x	3p 2p
b)	$(x+1) * (-x) = \sqrt[3]{(x+1)^3 - x^3 + 2020} = \sqrt[3]{3x^2 + 3x + 2021}$, deci $3x^2 + 3x + 2021 = 2021$ $3x(x+1) = 0$, deci $x = -1$ sau $x = 0$	3p 2p
c)	$\sqrt[3]{3x^3 + 4040} = a \Leftrightarrow 3x^3 + 4040 = a^3 \Leftrightarrow x^3 = \frac{a^3 - 4040}{3}$ Pentru orice număr real a , ecuația $x^3 = \frac{a^3 - 4040}{3}$ are o singură soluție reală $x = \sqrt[3]{\frac{a^3 - 4040}{3}}$, deci există un unic număr real x pentru care $x * x * x = a$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 =$ $= 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$, $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = 3$ $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty, 1]$, $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [1, 3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, 3]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [3, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3, +\infty)$	2p 3p
c)	$f''(x) = 6x - 12$, $x \in \mathbb{R}$ Cum $f''(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 2]$, obținem că funcția f este concavă pe $(-\infty, 2]$	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 f(x) \cdot \sqrt{x^2 + 3x + 5} dx = \int_0^1 (2x+3) dx = (x^2 + 3x) \Big _0^1 =$ $= 1 + 3 - 0 = 4$	3p 2p
b)	$\int_{-4}^1 f(x) dx = \int_{-4}^1 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}} dx = \int_{-4}^1 \frac{(x^2+3x+5)'}{\sqrt{x^2+3x+5}} dx = 2\sqrt{x^2+3x+5} \Big _{-4}^1 =$ $= 2\sqrt{9} - 2\sqrt{9} = 0$	3p 2p
c)	Dacă F este o primitivă a lui f , atunci $(F(\sin x))' = F'(\sin x) \cdot (\sin x)' = f(\sin x) \cdot \cos x$, pentru orice număr real x $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (F(\sin x))' dx = F(\sin x) \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = F(1) - F(0) = 2\sqrt{1^2 + 3 \cdot 1 + 5} - 2\sqrt{5} = 6 - 2\sqrt{5}$	3p 2p