

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{tehnologic}$**

**Testul 11**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $(0,6+0,8):0,7-0,25\cdot 4=1$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ ,  $f(x)=2x-5$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care  $f(a)-f(2)=2f(4)$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_3(x^2-7)=2$ .
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un element  $n$  din mulțimea  $A=\{1,2,3,\dots,20\}$ , numărul  $2n$  să fie multiplu de 10.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-8,6)$  și  $B(a,4)$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numerele reale  $a$  pentru care  $MA=OB$ , unde  $M$  este mijlocul segmentului  $OA$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , cu  $AB=12$  și  $BC=13$ . Determinați  $\sin B$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  și  $B(x)=\begin{pmatrix} 2x+1 & x \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det A=9$ .
- 5p** b) Arătați că  $A+B(1)\cdot B(-1)=2B(0)$ .
- 5p** c) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $B(1)+B(2)+B(3)+\dots+B(9)=9B(x)$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x\circ y=\frac{x+y}{2}-\frac{xy}{3}$ .
- 5p** a) Arătați că  $2\circ 6=0$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $x\circ 6=6$ .
- 5p** c) Determinați numerele întregi  $m$  pentru care  $m\circ(3m)\geq 2m-3$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ ,  $f(x)=\frac{x^4}{2}-2x^3+3$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x)=2x^2(x-3)$ ,  $x\in\mathbb{R}$ .
- 5p** b) Calculați  $\lim_{x\rightarrow+\infty}\frac{f'(x)}{x^2e^x}$ .
- 5p** c) Arătați că  $f(x)\geq-\frac{21}{2}$ , pentru orice număr real  $x$ .
2. Se consideră funcția  $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ ,  $f(x)=2x+1$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^2 f(x)dx=6$ .
- 5p** b) Calculați  $\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx$ .
- 5p** c) Determinați  $a\in(0,2)$  pentru care  $\int_{-a}^a\frac{1}{x^2+2f(x)+2}dx=\frac{2}{3}$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică *M\_tehnologic***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Testul 11**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$(0,6+0,8):0,7-0,25\cdot 4=1,4:0,7-1=$ $=2-1=1$	3p 2p
2.	$f(2)=-1, f(4)=3$ și $f(a)=2a-5$ , unde $a$ este număr real $2a-5-(-1)=2\cdot 3\Leftrightarrow 2a-4=6$ , de unde obținem $a=5$	3p 2p
3.	$x^2-7=3^2\Rightarrow x^2-16=0$ $x=-4$ sau $x=4$ , care convin	3p 2p
4.	Mulțimea $A$ are 20 de elemente, deci sunt 20 de cazuri posibile Numerele $n$ din mulțimea $A$ pentru care numărul $2n$ este multiplu de 10 sunt 5, 10, 15 și 20, deci sunt 4 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$	2p 2p 1p
5.	$OA=10\Rightarrow MA=5, OB=\sqrt{a^2+16}$ , unde $a$ este număr real $\sqrt{a^2+16}=5\Leftrightarrow a^2-9=0$ , de unde obținem $a=-3$ sau $a=3$	3p 2p
6.	$AC=5$ $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{13}$	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot 3 - 3\cdot 1 =$ $=12-3=9$	3p 2p
b)	$B(1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B(-1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B(1)\cdot B(-1) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $A + B(1)\cdot B(-1) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2B(0)$	3p 2p
c)	$B(1)+B(2)+B(3)+\dots+B(9) = \begin{pmatrix} 3+5+7+\dots+19 & 1+2+3+\dots+9 \\ 9 & 2+3+4+\dots+10 \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ $9\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} 2x+1 & x \\ 11 & x+1 \end{pmatrix}$ , de unde obținem $x=5$	3p 2p
2.a)	$2\circ 6 = \frac{2+6}{2} - \frac{2\cdot 6}{3} =$ $=4-4=0$	3p 2p

<b>b)</b>	$x \circ 6 = \frac{6-3x}{2}$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b>
	$\frac{6-3x}{2} = 6$ , de unde obținem $x = -2$	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$m \circ (3m) = -m^2 + 2m$ , pentru orice număr întreg $m$	<b>2p</b>
	$-m^2 + 2m \geq 2m - 3 \Leftrightarrow -m^2 + 3 \geq 0$ și, cum $m$ este număr întreg, obținem $m = -1$ sau $m = 0$ sau $m = 1$	<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{4x^3}{2} - 6x^2 + 0 =$	<b>3p</b>
	$= 2x^3 - 6x^2 = 2x^2(x-3)$ , $x \in \mathbb{R}$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x^2 e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x-3)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2(x-3))'}{(e^x)'}$	<b>3p</b>
	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = 3$ și $f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in (-\infty, 3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 3]$ , $f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [3, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3, +\infty)$	<b>3p</b>
	$f(x) \geq f(3)$ , pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și, cum $f(3) = -\frac{21}{2}$ , rezultă că $f(x) \geq -\frac{21}{2}$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (2x+1) dx = (x^2 + x) \Big _0^2 =$	<b>3p</b>
	$= (4+2) - (0-0) = 6$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(2x+1)'}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(2x+1) \Big _0^1 =$	<b>3p</b>
	$= \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{1}{2} \ln 3$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_{-a}^a \frac{1}{x^2 + 2f(x) + 2} dx = \int_{-a}^a \frac{1}{(x+2)^2} dx = -\frac{1}{x+2} \Big _{-a}^a = \frac{2a}{4-a^2}$ , pentru orice $a \in (0, 2)$	<b>3p</b>
	$\frac{2a}{4-a^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow a^2 + 3a - 4 = 0$ și, cum $a \in (0, 2)$ , obținem $a = 1$	<b>2p</b>