Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați al patrulea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_2 = 6$ și $b_3 = 3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x-4$. Determinați numerele reale a, pentru care $f(-a)+f(a)=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x+1}=16\cdot 4^{-x}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu dublul cifrei zecilor.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$, $B(4,-3)$ și $C(a,a+3)$, unde a este un număr real. Determinați numărul real a pentru care dreapta OC trece prin mijlocul segmentului AB.

5p **6**. Arătați că $\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ şi $B(a,b)=\begin{pmatrix}1 & a\\ b & 1\end{pmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\big(B(1,2)\big)=-1$.

5p **b)** Arătați că $\det\big(A\cdot B(a,b)\big)=0$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b pentru care $A\cdot B(a,b)=B(a,b)\cdot A$.

2. Pe mulțimea $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=|x-y|+1$.

5p **a)** Arătați că $3\circ 5=3$.

5p **b)** Calculați $a-b$, știind că $a=(2\circ 3)\circ 4$ și $b=2\circ(3\circ 4)$.

5p **c)** Arătați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care $m\circ n=m$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f **nu** este surjectivă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 2f(x)\,dx=3$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\displaystyle\int_0^e f\left(e^x\right)dx\leq\int_0^e e^{f(x)}dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_3^2=b_2b_4 \Rightarrow 3^2=6b_4$	**3p**
	$b_4=\frac{3}{2}$	**2p**
2.	$(-a)^2+3(-a)-4+a^2+3a-4=0 \Leftrightarrow a^2=4$	**3p**
	$a=-2$ sau $a=2$	**2p**
3.	$2^{x+1}=2^4\cdot 2^{-2x} \Leftrightarrow 2^{x+1}=2^{4-2x} \Leftrightarrow x+1=4-2x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au cifra unităţilor egală cu dublul cifrei zecilor sunt 12, 24, 36 şi 48, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{4}{90}=\frac{2}{45}$	**1p**
5.	$M(3,1)$ este mijlocul segmentului AB	**2p**
	$M\in OC \Leftrightarrow C\in OM$ și, cum dreapta OM are ecuaţia $x-3y=0$, obţinem $a-3(a+3)=0$, deci $a=-\frac{9}{2}$	**3p**
6.	$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2 x-(-\sin x)^2=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(1,2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(1,2))=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot1-1\cdot2=1-2=-1$	**3p**
b)	$A\cdot B(a,b)=\begin{pmatrix}1+b & a+1\\ 2+2b & 2a+2\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a şi b	**3p**
	$\det(A\cdot B(a,b))=2(a+1)(b+1)-2(a+1)(b+1)=0$, pentru orice numere reale a şi b	**2p**
c)	$B(a,b)\cdot A=\begin{pmatrix}1+2a & 1+2a\\ b+2 & b+2\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a şi b	**2p**
	$\begin{pmatrix}1+b & a+1\\ 2+2b & 2a+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2a & 1+2a\\ b+2 & b+2\end{pmatrix} \Leftrightarrow a=0$ şi $b=0$	**3p**

2.a)	$3\circ 5=\|3-5\|+1=\|-2\|+1=$ $=2+1=3$	**3p** **2p**
b)	$a=(2\circ 3)\circ 4=2\circ 4=3$ $b=2\circ(3\circ 4)=2\circ 2=1$, deci $a-b=2$	**2p** **3p**
c)	Pentru $n=1$ şi m număr natural nenul, $m\circ n=m\circ 1=\|m-1\|+1=m-1+1=$ $=m$, deci există o infinitate de perechi de numere naturale nenule (m,n) pentru care $m\circ n=m$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\ln(x-1)-\ln(x+1)\right)'=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=$ $=\frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=$ $=\ln\frac{1-0}{1+0}=\ln 1=0$	**3p** **2p**
c)	$x\in(1,+\infty)\Rightarrow x^2-1>0\Rightarrow f'(x)>0$, deci funcția f este crescătoare $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\Rightarrow f(x)\le 0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci funcția f nu este surjectivă	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1 2f(x)dx=\int_0^1(2x+2)dx=\left(x^2+2x\right)\Big\|_0^1=$ $=1+2=3$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 e^x f(x)dx=\int_0^1 e^x(x+1)dx=\int_0^1\left(e^x\right)'(x+1)dx=(x+1)e^x\Big\|_0^1-\int_0^1 e^x dx=$ $=2e-1-e^x\Big\|_0^1=2e-1-(e-1)=e$	**3p** **2p**
c)	$f\left(e^x\right)-e^{f(x)}=e^x+1-e^{x+1}=1-e^x(e-1)$, pentru orice $x\in[0,e]$ $e-1>1$ și $e^x\ge 1$, pentru orice $x\in[0,e]\Rightarrow 1-e^x(e-1)\le 0$, pentru orice $x\in[0,e]$, de unde obținem că $\int_0^e f\left(e^x\right)dx\le\int_0^e e^{f(x)}dx$	**2p** **3p**