Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=5$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-2mx-6$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că graficul funcției f intersectează axa Ox într-un punct în care și graficul funcției g intersectează axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2-4x+12\right)=\log_3 27$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor divizibilă cu 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(-1,3)$ și $C(1,m)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în B.

5p **6.** Arătați că $\sin\dfrac{25\pi}{6}+\cos\dfrac{23\pi}{3}=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1+c\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}(1+a)x+y+z=0\\ x+(1+b)y+z=0\\ x+y+(1+c)z=0\end{cases}$, unde a, b și c sunt numere reale nenule.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(-2,0,2)\right)=-4$.

5p **b)** Arătați că, dacă $abc+ab+ac+bc\neq 0$, atunci matricea $A(a,b,c)$ este inversabilă.

5p **c)** Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații admite și soluții diferite de soluția $(0,0,0)$, atunci numărul $N=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ este întreg.

2. Pe mulțimea $G=(0,2)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\dfrac{xy}{xy-x-y+2}$ și se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,2)$, $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $1*1=1$.

5p **b)** Demonstrați că $f(x)*f(y)=f(xy)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $f\left(\dfrac{1}{2}\right)*f\left(\dfrac{2}{3}\right)*f\left(\dfrac{3}{4}\right)*\ldots*f\left(\dfrac{2020}{2021}\right)=\dfrac{2n}{n+1}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x\ln x-x^2+3$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$.

5p **b)** Arătați că funcția f este convexă pe $(0,1)$.

5p **c)** Demonstrați că $2\ln x < x - \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = 1$.

5p **b)** Arătați că $I_2 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

5p **c)** Demonstrați că $I_n \le \ln 2$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=\left\|1-\sqrt{2}\right\|=\sqrt{2}-1$	**2p**
	Cum $\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{2}\right)^3}=6-\sqrt{2}$, obținem că $\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=6-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=5$	**3p**
2.	$f(x)=0\Leftrightarrow x=3$, deci graficul funcției f intersectează axa Ox în punctul $(3,0)$	**2p**
	$g(3)=0\Leftrightarrow 9-6m-6=0$, deci $m=\frac{1}{2}$	**3p**
3.	$\log_2\left(x^2-4x+12\right)=3\Rightarrow x^2-4x+12=8\Rightarrow x^2-4x+4=0$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au suma cifrelor divizibilă cu 3 sunt numerele naturale de două cifre care sunt divizibile cu 3, deci sunt 30 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$	**1p**
5.	$AB\perp BC\Rightarrow m_{AB}\cdot m_{BC}=-1$	**2p**
	Cum $m_{AB}=1$ și $m_{BC}=\frac{m-3}{2}$, obținem $\frac{m-3}{2}=-1$, deci $m=1$	**3p**
6.	$\sin\frac{25\pi}{6}=\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$	**2p**
	Cum $\cos\frac{23\pi}{3}=\cos\left(6\pi+\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$, obținem că $\sin\frac{25\pi}{6}+\cos\frac{23\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-2,0,2)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&1\\1&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(-2,0,2)\right)=\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&1&1\\1&1&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-3+1+1-1-(-1)-3=-4$	**3p**
b)	$\det\left(A(a,b,c)\right)=\begin{vmatrix}1+a&1&1\\1&1+b&1\\1&1&1+c\end{vmatrix}=(1+a)(1+b)(1+c)+1+1-(1+a)-(1+b)-(1+c)=$	**2p**
	$=abc+ab+ac+bc\neq 0$, deci matricea $A(a,b,c)$ este inversabilă	**3p**
c)	Sistemul este compatibil nedeterminat, deci $\det\left(A(a,b,c)\right)=0\Rightarrow abc+ab+ac+bc=0$	**3p**
	$ab+ac+bc=-abc\Rightarrow\frac{ab+ac+bc}{abc}=-1$, deci $N=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-1$, care este număr întreg	**2p**

2.a)	$1*1=\dfrac{1\cdot 1}{1\cdot 1-1-1+2}=\dfrac{1}{1-1-1+2}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{1}=1$	**2p**
b)	$f(x)*f(y)=\dfrac{f(x)f(y)}{f(x)f(y)-f(x)-f(y)+2}=\dfrac{\dfrac{2}{x+1}\cdot\dfrac{2}{y+1}}{\dfrac{2}{x+1}\cdot\dfrac{2}{y+1}-\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{y+1}+2}=$	**2p**
	$=\dfrac{4}{4-2(y+1)-2(x+1)+2(x+1)(y+1)}=\dfrac{4}{2xy+2}=\dfrac{2}{xy+1}=f(xy)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$	**3p**
c)	$f\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2020}{2021}\right)=\dfrac{2n}{n+1}\Leftrightarrow f\left(\dfrac{1}{2021}\right)=\dfrac{2n}{n+1}$, unde n este număr natural	**3p**
	$\dfrac{2}{\dfrac{1}{2021}+1}=\dfrac{2n}{n+1}\Leftrightarrow\dfrac{2\cdot 2021}{2022}=\dfrac{2n}{n+1}$, deci $n=2021$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2\ln x-2x+2$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$	**2p**
b)	$f''(x)=\dfrac{2(1-x)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	Cum $f''(x)>0$, pentru orice $x\in(0,1)$, obținem că funcția f este convexă pe $(0,1)$	**3p**
c)	$f''(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f'$ strict descrescătoare pe $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f'(x)<f'(1)$, deci $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**2p**
	f continuă și f strict descrescătoare pe $(1,+\infty)\Rightarrow f(x)<f(1)$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci $2x\ln x-x^2+3<2$, de unde obținem $2\ln x<x-\dfrac{1}{x}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$I_1+\int\limits_0^1\dfrac{1}{1+x}dx=\int\limits_0^1\dfrac{x}{1+x}dx+\int\limits_0^1\dfrac{1}{1+x}dx=\int\limits_0^1\left(\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x}\right)dx=\int\limits_0^1 1dx=$	**3p**
	$=x\Big\vert_0^1=1$	**2p**
b)	$I_2=2\int\limits_0^1\dfrac{x^2}{1+x^2}dx=2\int\limits_0^1\left(1-\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx=2(x-\operatorname{arctg}x)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)=2-\dfrac{\pi}{2}$	**2p**
c)	$I_n=n\int\limits_0^1\dfrac{x^n}{1+x^n}dx=\int\limits_0^1 x\cdot\left(\ln\left(1+x^n\right)\right)'dx\le\int\limits_0^1\left(\ln\left(1+x^n\right)\right)'dx=$	**3p**
	$=\ln\left(1+x^n\right)\Big\vert_0^1=\ln 2$, deci $I_n\le\ln 2$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**