

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{tehnologic}$**

**Test 11**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $\frac{1}{2} : 0,5 - \frac{1}{4} : 0,25 = 0$ .
- 5p** 2. Calculați  $f(-1) \cdot f(1)$ , unde  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{3x-2} = 5$ .
- 5p** 4. Un obiect costă 1000 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 20%.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2,3)$  și  $B(6,3)$ . Calculați distanța de la punctul  $O$  la mijlocul segmentului  $AB$ .
- 5p** 6. Calculați lungimea laturii  $AB$  a triunghiului  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , știind că  $AC = 4$  și  $B = \frac{\pi}{4}$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  și  $B(x, y) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  și  $y$  sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că  $\det A = -4$ .
- 5p** b) Arătați că  $\det(A - 2B(x, y)) = 0$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p** c) Determinați numerele reale  $x$  și  $y$  pentru care  $A \cdot B(x, y) = B(x, y) \cdot A$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy + 2(x + y) + 2$ .
- 5p** a) Arătați că  $2020 \circ (-2) = -2$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $x \circ y = (x + 2)(y + 2) - 2$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p** c) Determinați numerele reale nenule  $x$  pentru care  $\frac{1}{x} \circ x = x$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + (x-1)^2$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)} = 3$ .
- 5p** c) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției  $f$  în care tangenta la graficul funcției  $f$  este paralelă cu dreapta  $y = 3x + 1$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 2$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_{-1}^1 (f(x) - x^3 - 2x - 2) dx = 0$ .
- 5p** b) Arătați că  $\int_0^2 e^x (f(x) - x^5 - x^3 - 3x - 1) dx = -2$ .
- 5p** c) Demonstrați că orice primitivă a funcției  $f$  este convexă.

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{tehnologic}$**   
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Test 11

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$\frac{1}{2} : 0,5 - \frac{1}{4} : 0,25 = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} - \frac{1}{4} : \frac{1}{4} =$ $= 1 - 1 = 0$	3p 2p
2.	$f(1) = 0$ $f(-1) \cdot f(1) = 0$	3p 2p
3.	$3x - 2 = 25$ $x = 9$ , care convine	3p 2p
4.	$\frac{20}{100} \cdot 1000 = 200$ Prețul după scumpire este $1000 + 200 = 1200$ de lei	3p 2p
5.	$M(4,3)$ , unde $M$ este mijlocul segmentului $AB$ $OM = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = 5$	3p 2p
6.	$\triangle ABC$ este dreptunghic în $A$ și $B = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \triangle ABC$ este isoscel $AB = AC = 4$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 2 =$ $= -2 - 2 = -4$	3p 2p
b)	$A - 2B(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ 2y & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2x & 0 \\ 1-2y & 0 \end{pmatrix}$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$ $\det(A - 2B(x, y)) = \begin{vmatrix} 1-2x & 0 \\ 1-2y & 0 \end{vmatrix} = 0$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	2p 3p
c)	$A \cdot B(x, y) = \begin{pmatrix} x+2y & -1 \\ x-2y & 3 \end{pmatrix}$ , $B(x, y) \cdot A = \begin{pmatrix} x+1 & 2x-2 \\ y-1 & 2y+2 \end{pmatrix}$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$ $\begin{pmatrix} x+2y & -1 \\ x-2y & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 & 2x-2 \\ y-1 & 2y+2 \end{pmatrix}$ , de unde obținem $x = \frac{1}{2}$ , $y = \frac{1}{2}$	2p 3p
2.a)	$2020 \circ (-2) = 2020 \cdot (-2) + 2(2020 + (-2)) + 2 =$ $= 2020 \cdot (-2) + 2 \cdot 2020 + 2 \cdot (-2) + 2 = -4 + 2 = -2$	3p 2p
b)	$x \circ y = xy + 2x + 2y + 4 - 2 =$ $= x(y+2) + 2(y+2) - 2 = (x+2)(y+2) - 2$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	3p 2p

c)	$\left(\frac{1}{x}+2\right)(x+2)-2=x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+2\right)(x+2)=x+2 \Leftrightarrow (x+2)\left(\frac{1}{x}+1\right)=0$ $x=-2 \text{ sau } x=-1$	<p>3p</p> <p>2p</p>
----	--	---------------------

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 3x^2 + 2(x-1)(x-1)' =$ $= 3x^2 + 2(x-1) = 3x^2 + 2x - 2, x \in \mathbb{R}$	<p>2p</p> <p>3p</p>
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3x^2 + 2x - 2)}{x^3 + (x-1)^2} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - 2x}{x^3 + x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = 3$	<p>2p</p> <p>3p</p>
c)	<p>Tangenta la graficul funcției <math>f</math> în punctul de abscisă <math>x = a</math>, situat pe graficul funcției <math>f</math> are panta egală cu <math>f'(a)</math>, deci este paralelă cu dreapta <math>y = 3x + 1 \Leftrightarrow f'(a) = 3</math></p> $3a^2 + 2a - 5 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{3} \text{ sau } a = 1$	<p>2p</p> <p>3p</p>
2.a)	$\int_{-1}^1 (f(x) - x^3 - 2x - 2) dx = \int_{-1}^1 (x^5 + x^3 + 2x + 2 - x^3 - 2x - 2) dx = \int_{-1}^1 x^5 dx = \frac{x^6}{6} \Big _{-1}^1 =$ $= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$	<p>3p</p> <p>2p</p>
b)	$\int_0^2 e^x (f(x) - x^5 - x^3 - 3x - 1) dx = \int_0^2 e^x (-x + 1) dx = e^x (-x + 1) \Big _0^2 - \int_0^2 (-1) e^x dx =$ $= -e^2 - 1 + e^2 - 1 = -2$	<p>3p</p> <p>2p</p>
c)	<p><math>F</math> este primitivă a funcției <math>f \Rightarrow F'(x) = f(x), x \in \mathbb{R}</math></p> $F''(x) = f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2 \geq 0, \text{ pentru orice număr real } x, \text{ deci } F \text{ este convexă}$	<p>2p</p> <p>3p</p>