

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $\log_2(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1) = -\log_2(\sqrt[3]{2} - 1)$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , astfel încât $f(x) + f(-x) = 2020$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 3^{1-x} = 4$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie cuprins între $\sqrt{122}$ și $\sqrt{170}$.
- 5p** 5. Se consideră paralelogramul $ABCD$. Arătați că $\overline{AB} + 2\overline{BD} + 3\overline{DA} = \overline{CA}$.
- 5p** 6. Lungimile laturilor unui triunghi sunt egale cu 2, 3 și 4. Arătați că triunghiul este obtuzunghic.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Arătați că $\det A = \det(A + I_2)$.
- 5p** b) Determinați numărul real a , știind că $A \cdot A \cdot A = aI_2$.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale, cu $m \neq n$, pentru care $\det(A + mI_2) = \det(A + nI_2)$.
2. Pe mulțimea $M = (0, 1)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \frac{xy}{1 - x - y + 2xy}$.
- 5p** a) Arătați că $x \circ \frac{1}{2} = x$, pentru orice $x \in M$.
- 5p** b) Demonstrați că legea de compoziție „ \circ ” este comutativă.
- 5p** c) Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Arătați că $f(x) \circ f(y) = f(xy)$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Demonstrați că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1, f(1))$ este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Arătați că $g'(x) + g(x) = \frac{1}{e^x}$, pentru orice număr real x , unde $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f''(x)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 (x^2 + 1)f(x) dx = 3$.

5p b) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.

5p c) Determinați numărul real a pentru care $\int_1^e \left(f(x) + \frac{2x-1}{x^2+1} \right) \ln x dx = e^2 + a$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\log_2(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1) + \log_2(\sqrt[3]{2} - 1) = 0 \Leftrightarrow \log_2\left(\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1\right)\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)\right) = 0$ Cum $\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1\right)\left(\sqrt[3]{2} - 1\right) = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 - 1 = 1$, obținem că $\log_2\left(\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1\right)\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)\right) = 0$	3p 2p
2.	$f(x) + f(-x) = 2020 \Leftrightarrow 2x + a + 2 \cdot (-x) + a = 2020$ $2a = 2020$, deci $a = 1010$	3p 2p
3.	$3^x + \frac{3}{3^x} = 4 \Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 \Leftrightarrow (3^x - 1)(3^x - 3) = 0$ $x = 0$ sau $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele naturale cuprinse între $\sqrt{122}$ și $\sqrt{170}$ sunt 12 și 13, deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$	2p 2p 1p
5.	$\overline{AB} + 2\overline{BD} + 3\overline{DA} = (\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DA}) + \overline{BD} + 2\overline{DA} = \vec{0} + \overline{BD} + \overline{DA} + \overline{DA} = \overline{BA} + \overline{DA} =$ $= -(\overline{AB} + \overline{AD}) = -\overline{AC} = \overline{CA}$	3p 2p
6.	Considerăm $\triangle ABC$ cu $AB = 2$, $AC = 3$ și $BC = 4 \Rightarrow \cos A = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4}$ $\cos A < 0$, deci unghiul A este obtuz	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 13 \cdot (-1) = 1$ $\det(A + I_2) = \begin{vmatrix} 4 & 13 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) - 13 \cdot (-1) = 1$, deci $\det(A + I_2) = \det A$	2p 3p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & -13 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ $aI_2 = I_2$, deci $a = 1$	3p 2p
c)	$\det(A + mI_2) = \begin{vmatrix} 3+m & 13 \\ -1 & -4+m \end{vmatrix} = m^2 - m + 1$, pentru orice număr natural m $m^2 - m + 1 = n^2 - n + 1 \Leftrightarrow (m - n)(m + n - 1) = 0$ și, cum m și n sunt numere naturale, $m \neq n$, obținem $m + n = 1$, deci perechile sunt $(1, 0)$ și $(0, 1)$	3p 2p

<p>2.a)</p>	$x \circ \frac{1}{2} = \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{1 - x - \frac{1}{2} + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}} =$ $= \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = x, \text{ pentru orice } x \in M$	<p>2p</p> <p>3p</p>
<p>b)</p>	$x \circ y = \frac{xy}{1 - x - y + 2xy} = \frac{yx}{1 - y - x + 2yx} =$ $= y \circ x, \text{ pentru orice } x, y \in (0,1), \text{ deci legea de compoziție „} \circ \text{” este comutativă}$	<p>2p</p> <p>3p</p>
<p>c)</p>	$f(x) \circ f(y) = \frac{f(x)f(y)}{1 - f(x) - f(y) + 2f(x)f(y)} = \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{y}{y+1}}{1 - \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1} + 2 \cdot \frac{xy}{(x+1)(y+1)}} =$ $= \frac{xy}{xy + x + y + 1 - xy - x - yx - y + 2xy} = \frac{xy}{xy + 1} = f(xy), \text{ pentru orice } x, y \in (0, +\infty)$	<p>3p</p> <p>2p</p>

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

<p>1.a)</p>	$f'(x) = \frac{(e^x + 1)e^x - (e^x + x)e^x}{e^{2x}} =$ $= \frac{(e^x + 1 - e^x - x)e^x}{e^{2x}} = \frac{1 - x}{e^x}, x \in \mathbb{R}$	<p>3p</p> <p>2p</p>
<p>b)</p>	<p>Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1, f(1))$ are panta $f'(1) = 0$</p> <p>Cum $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f și panta ei este 0, deci tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1, f(1))$ și asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f sunt paralele</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
<p>c)</p>	$f'(x) = (1 - x)e^{-x} \Rightarrow f''(x) = (x - 2)e^{-x}, \text{ deci } g(x) = (x - 2)e^{-x}, x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = (3 - x)e^{-x}, x \in \mathbb{R}, \text{ deci } g'(x) + g(x) = (3 - x)e^{-x} + (x - 2)e^{-x} = e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \text{ pentru}$ <p>orice număr real x</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
<p>2.a)</p>	$\int_0^1 (x^2 + 1)f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1) \left(4x - \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \int_0^1 (4x^3 + 2x + 1) dx =$ $= (x^4 + x^2 + x) \Big _0^1 = 1 + 1 + 1 - 0 = 3$	<p>2p</p> <p>3p</p>
<p>b)</p>	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(4x - \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \left(2x^2 - \ln(x^2 + 1) + \arctg x \right) \Big _0^1 =$ $= 2 - \ln 2 + \arctg 1 - 0 + \ln 1 - \arctg 0 = 2 - \ln 2 + \frac{\pi}{4}$	<p>3p</p> <p>2p</p>
<p>c)</p>	$\int_1^e \left(f(x) + \frac{2x - 1}{x^2 + 1} \right) \ln x dx = \int_1^e 4x \ln x dx = 2x^2 \ln x \Big _1^e - \int_1^e 2x dx = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1$ $e^2 + 1 = e^2 + a, \text{ deci } a = 1$	<p>2p</p> <p>3p</p>