

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică  $M\_mate-info$

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $\sqrt{7}(\sqrt{6}+1) - \sqrt{6}(\sqrt{7}+1) = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}$ .
- 5p 2. Se consideră funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + x + 1$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 2x + 2$ . Demonstrați că  $f(x+1) - f(x) = g(x)$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2 - 2x - 1}$ .
- 5p 4. Se consideră mulțimea  $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Determinați numărul de submulțimi ale lui  $M$  care au cel puțin trei elemente.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră trapezul  $ABCD$  cu  $AB \parallel CD$  și  $A(1, 2)$ ,  $B(4, 5)$  și  $D(-3, 2)$ . Determinați ecuația dreptei  $MN$ , știind că segmentul  $MN$  este linia mijlocie a trapezului  $ABCD$ .
- 5p 6. Calculați  $\sin 2x$ , știind că  $(2 \sin x + \cos x)^2 = 2 + 3 \sin^2 x$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a & i & a \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix}$ , unde  $i^2 = -1$  și  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(0)) = i$ .
- 5p b) Demonstrați că, pentru orice număr real  $a$ , matricea  $A(a)$  este inversabilă.
- 5p c) Calculați  $\underbrace{A(0) \cdot A(0) \cdot A(0) \cdot \dots \cdot A(0)}_{\text{de 2020 ori } A(0)}$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 3^{x+y} - 3^{x+1} - 3^{y+1} + 12$ .
- 5p a) Arătați că  $x * 1 = 3$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $0 * x = -9$ .
- 5p c) Demonstrați că, dacă  $x * y = 3$ , atunci  $(x-1)(y-1) = 0$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - \ln(x^2 + 1)$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Demonstrați că axa  $Ox$  este tangentă graficului funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul  $n$ , ecuația  $f(x) = n$  are două soluții reale distincte.
2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_1^e \frac{f(x)}{e^x} dx = 1$ .

**5p** b) Arătați că  $\int_1^2 x^3 f(x^2) dx = \frac{e(e-1)(e^2 + e + 1)}{2}$ .

**5p** c) Demonstrați că  $\int_1^e f(x) dx + \int_1^e e^x \ln x dx = e^e$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică *M\_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Test 11**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$\sqrt{7}(\sqrt{6}+1) - \sqrt{6}(\sqrt{7}+1) = \sqrt{42} + \sqrt{7} - \sqrt{42} - \sqrt{6} = \sqrt{7} - \sqrt{6}$	<b>2p</b>
	Cum $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{\sqrt{7}^2 - \sqrt{6}^2} = \sqrt{7} - \sqrt{6}$ , obținem că $\sqrt{7}(\sqrt{6}+1) - \sqrt{6}(\sqrt{7}+1) = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}$	<b>3p</b>
<b>2.</b>	$f(x+1) - f(x) = (x+1)^2 + (x+1) + 1 - (x^2 + x + 1) =$ $= x^2 + 2x + 1 + x + 1 + 1 - x^2 - x - 1 = 2x + 2 = g(x)$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>3.</b>	$x - 1 = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$ $x = 0$ , care nu convine, sau $x = 3$ , care convine	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	Numărul de submulțimi ale lui $M$ , cu cel puțin trei elemente, este egal cu $C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 =$ $= 10 + 5 + 1 = 16$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>5.</b>	$M(-1, 2)$ , unde $M$ este mijlocul segmentului $AD$ , $m_{AB} = 1$ Cum $MN$ este paralelă cu $AB$ , ecuația dreptei $MN$ este $y - 2 = x + 1$ , deci $y = x + 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>6.</b>	$4\sin^2 x + 4\sin x \cos x + \cos^2 x = 2 + 3\sin^2 x \Leftrightarrow 4\sin x \cos x = 2 - (\sin^2 x + \cos^2 x)$ $2\sin 2x = 2 - 1$ , deci $\sin 2x = \frac{1}{2}$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & i & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & i & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$ $= -i + 0 + 0 - (-2i) - 0 - 0 = i$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>b)</b>	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ a & i & a \\ -1 & a & -1 \end{vmatrix} = a^2 + i$ , pentru orice număr real $a$ Cum, pentru orice număr real $a$ , $a^2 + i \neq 0$ , obținem că $\det(A(a)) \neq 0$ , deci, pentru orice număr real $a$ , matricea $A(a)$ este inversabilă	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$A(0) \cdot A(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3$ $\underbrace{A(0) \cdot A(0) \cdot A(0) \cdot \dots \cdot A(0)}_{\text{de 2020 ori } A(0)} = \underbrace{(-I_3) \cdot (-I_3) \cdot (-I_3) \cdot \dots \cdot (-I_3)}_{\text{de 1010 ori } (-I_3)} = I_3$	<b>2p</b> <b>3p</b>

<b>2.a)</b>	$x * 1 = 3^{x+1} - 3^{x+1} - 3^{1+1} + 12 =$ $= -9 + 12 = 3$ , pentru orice număr real $x$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$0 * x = 3^{0+x} - 3^{0+1} - 3^{x+1} + 12 = 3^x - 3^{x+1} + 9$ , deci $3^{x+1} - 3^x = 18$ $3^x(3-1) = 18 \Leftrightarrow 3^x = 9$ , deci $x = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$x * y = 3 \Leftrightarrow 3^{x+y} - 3^{x+1} - 3^{y+1} + 9 = 0 \Leftrightarrow 3^x(3^y - 3) - 3(3^y - 3) = 0 \Leftrightarrow (3^x - 3)(3^y - 3) = 0$ $3^x - 3 = 0$ sau $3^y - 3 = 0$ , deci $x = 1$ sau $y = 1$ , de unde obținem $(x-1)(y-1) = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = 2x - \frac{2x}{x^2 + 1} =$ $= \frac{2x^3 + 2x - 2x}{x^2 + 1} = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ , $x \in \mathbb{R}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	Ecuția tangentei la graficul funcției $f$ în $A(a, f(a))$ este $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ , deci axa $Ox$ , de ecuație $y = 0$ , este tangentă la graficul funcției $f$ dacă și numai dacă există numărul real $a$ astfel încât $f'(a) = 0$ și $f(a) = 0$ Cum $f'(0) = 0$ și $f(0) = 0$ , obținem că axa $Ox$ este tangentă graficului funcției $f$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$ , $f'(x) < 0$ , pentru orice $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ , $f(0) = 0$ și $f'(x) > 0$ , pentru orice $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$ , deci, pentru orice număr natural nenul $n$ , ecuația $f(x) = n$ are două soluții reale distincte	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_1^e \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big _1^e =$ $= \ln e - \ln 1 = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_1^2 x^3 f(x^2) dx = \int_1^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big _1^2 =$ $= \frac{e^4 - e}{2} = \frac{e(e-1)(e^2 + e + 1)}{2}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_1^e \frac{e^x}{x} dx + \int_1^e e^x \ln x dx = \int_1^e (\ln x)' e^x dx + \int_1^e e^x \ln x dx = e^x \ln x \Big _1^e - \int_1^e e^x \ln x dx + \int_1^e e^x \ln x dx =$ $= e^e \ln e - e^1 \ln 1 = e^e$	<b>3p</b> <b>2p</b>