

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{tehnologic}}$

Testul 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $(3 + \sqrt{5})^2 - \sqrt{5}(6 + 2\sqrt{5}) = 4$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x - 1$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+4} = 4^{x+3}$.
- 5p 4. Un produs costă 360 de lei. Determinați prețul produsului după o scumpire cu 15%.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2, 3)$, $B(-1, -4)$ și $C(5, 4)$. Arătați că triunghiul AMC este dreptunghic, unde M este mijlocul segmentului BC .
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC , în care unghiurile A și B au măsurile egale cu 30° , respectiv 45° și $BC = 4$. Determinați lungimea laturii AC a triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det A = 1$.
- 5p b) Determinați numărul real x pentru care $B \cdot B = A$.
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(B + (\det B)A) = 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = x + y + 16$.
- 5p a) Arătați că $(-8) \circ 2 = 10$.
- 5p b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.
- 5p c) Determinați numărul real x pentru care pentru care $x \circ \left(\frac{x}{2} + 3\right) \circ x = 2x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{x^2} + \ln x - 2$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x)}{x^3 - 1} = -1$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{2}{3}$.
- 5p b) Arătați că $\int_1^e (f(x) + 1) \ln x dx = \frac{2e^3 + 1}{9}$.
- 5p c) Determinați numărul real, a , $a \in (0, +\infty)$, pentru care $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (f(\sin x) + f(\cos x)) \operatorname{tg} x dx = \ln a$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(3 + \sqrt{5})^2 - \sqrt{5}(6 + 2\sqrt{5}) = 9 + 6\sqrt{5} + 5 - 6\sqrt{5} - 10 =$ $= 14 - 10 = 4$	3p 2p
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 5x + 1 = 3x - 1 \Leftrightarrow 2x = -2$ Abscisa punctului de intersecție este $x = -1$	3p 2p
3.	$2^{x+4} = 2^{2(x+3)} \Leftrightarrow x + 4 = 2x + 6$ $x = -2$	3p 2p
4.	$360 + \frac{15}{100} \cdot 360 =$ $= 360 + 54 = 414$ lei	2p 3p
5.	$M(2, 0)$ $m_{AM} = -\frac{3}{4}$, $m_{MC} = \frac{4}{3}$, de unde obținem $m_{AM} \cdot m_{MC} = -1$, deci triunghiul AMC este dreptunghic	2p 3p
6.	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Leftrightarrow \frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow AC = 4\sqrt{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - (-4) \cdot (-2) =$ $= 9 - 8 = 1$	3p 2p
b)	$B \cdot B = \begin{pmatrix} 1+x & -2x \\ -2 & x+1 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} 1+x & -2x \\ -2 & x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = 2$	3p 2p
c)	$\det B = 1 - x \Rightarrow \det(B + (\det B)A) = \begin{vmatrix} -3x+2 & 5x-4 \\ 2x-1 & -3x+2 \end{vmatrix} = -x^2 + x$, pentru orice număr real x $-x^2 + x = 0$, de unde obținem $x = 0$ sau $x = 1$	3p 2p
2.a)	$(-8) \circ 2 = -8 + 2 + 16 =$ $= -6 + 16 = 10$	3p 2p
b)	$x \circ e = x$, pentru orice număr real x , de unde obținem $e = -16$ $-16 \circ x = -16 + x + 16 = x$, pentru orice număr real x , deci $e = -16$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”	2p 3p

c)	$x \circ \left(\frac{x}{2} + 3\right) = \frac{3x}{2} + 19 \Rightarrow x \circ \left(\frac{x}{2} + 3\right) \circ x = \frac{5x}{2} + 35$, pentru orice număr real x	3p
	$\frac{5x}{2} + 35 = 2x$, de unde obținem $x = -70$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = -\frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} - 0 =$	3p
	$= \frac{x^2 - 4}{x^3} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$f(1) = 0$, $f'(1) = -3$	2p
	Ecuția tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, adică $y = -3x + 3$	3p
c)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x)}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 + x^2 \ln x - 2x^2}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 + x^2 \ln x - 2x^2)'}{(x^3 - 1)'} =$	2p
	$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0 + 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} - 4x}{3x^2 - 0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x \ln x - 3x}{3x^2} = -1$	3p
2.a)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \Big _0^1 =$	3p
	$= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$	2p
b)	$\int_1^e (f(x) + 1) \ln x dx = \int_1^e x^2 \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x dx = \left(\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}\right) \Big _1^e =$	3p
	$= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}$	2p
c)	$f(\sin x) + f(\cos x) = \sin^2 x - 1 + \cos^2 x - 1 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 = -1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$,	
	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (f(\sin x) + f(\cos x)) \operatorname{tg} x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx = \ln(\cos x) \Big _0^{\frac{\pi}{3}} = \ln\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) - \ln(\cos 0) = \ln \frac{1}{2}$	3p
	$\ln \frac{1}{2} = \ln a$, de unde obținem $a = \frac{1}{2}$, care convine	2p