

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați modulul numărului complex $z = (2 + 3i)(2 - 3i) - (9 - 3i)$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 5x + 20$. Calculați $(g \circ f)(2)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-5} = \frac{1}{16}$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 8.
- 5p 5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 4$, $BC = 6$ și măsura unghiului ABC de 120° . Determinați modulul vectorului \overline{AM} , unde punctul M este mijlocul segmentului BD .
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 12$, $AC = 16$ și $BC = 20$. Arătați că $\frac{r}{R} = \frac{2}{5}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC și R este raza cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ (2a-1)x + 2y + z = a \end{cases}$,
unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(4)) = 5$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.
- 5p c) Pentru $a = 3$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului de ecuații pentru care $z_0^2 = x_0 + y_0$.
2. Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt{x^{\log_3 y}}$.
- 5p a) Arătați că $4 * 3 = 2$.
- 5p b) Arătați că $e = 9$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Determinați $x \in G$, știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „*”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 4) + 3$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 2x(2x^2 - 13)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{f(x)-3} = \frac{1}{30}$.
- 5p c) Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x) = m$ are exact patru soluții reale.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x \arctg x$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\arctg x} dx = 3$.

5p | **b)** Determinați numărul real nenul a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} f(x) dx = \frac{\pi}{a} - \sqrt{3}$.

5p | **c)** Demonstrați că $\int_{-1}^1 x f(x) dx = 0$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = (2 + 3i)(2 - 3i) - (9 - 3i) = 2^2 - (3i)^2 - 9 + 3i = 4 + 3i$ $ z = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$	3p 2p
2.	$f(2) = 0$ $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = 5 \cdot 0 + 20 = 20$	2p 3p
3.	$4^{x-5} = 4^{-2} \Leftrightarrow x - 5 = -2$ $x = 3$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile Mulțimea numerelor naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 8 este $\{118, 181, 811, 124, 142, 214, 241, 412, 421, 222\}$, deci sunt 10 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{10}{900} = \frac{1}{90}$	2p 2p 1p
5.	$ABCD$ este paralelogram, deci $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\sphericalangle ABC) = 76 \Rightarrow AC = 2\sqrt{19} \Rightarrow \overline{AM} = AM = \sqrt{19}$	2p 3p
6.	$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ este dreptunghic în $A \Rightarrow R = \frac{BC}{2} = 10$ $P_{\triangle ABC} = 48$ și $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96 \Rightarrow r = \frac{96}{24} = 4$, de unde obținem $\frac{r}{R} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(4) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(4)) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 4 + 21 + (-8) - (-14) - 2 - 24 = 5$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = 5a - 15$, pentru orice număr real a Matricea $A(a)$ nu este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a)) = 0$, deci $a = 3$	2p 3p
c)	Pentru $a = 3$ soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(1 + 5\alpha, -1 - 13\alpha, \alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ $z_0^2 = x_0 + y_0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 8\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -8$ sau $\alpha = 0$, deci $(x_0, y_0, z_0) = (-39, 103, -8)$ sau $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 0)$	3p 2p

2.a)	$4 * 3 = \sqrt{4^{\log_3 3}} =$ $= \sqrt{4} = 2$	3p 2p
b)	$x * 9 = \sqrt{x^{\log_3 9}} = \sqrt{x^2} = x$, pentru orice $x \in G$ $9 * x = \sqrt{9^{\log_3 x}} = \sqrt{3^{2 \log_3 x}} = \sqrt{(3^{\log_3 x})^2} = \sqrt{x^2} = x$, pentru orice $x \in G$, deci $e = 9$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	2p 3p
c)	$x * x = e \Rightarrow \sqrt{x^{\log_3 x}} = 9 \Rightarrow x^{\log_3 x} = 81 \Rightarrow \log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 81$, deci $\log_3^2 x = 4$ $\log_3 x = -2$ sau $\log_3 x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$, care nu convine; $x = 9$, care convine	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2x \cdot (x^2 - 4) + (x^2 - 9) \cdot 2x =$ $= 2x(x^2 - 4 + x^2 - 9) = 2x(2x^2 - 13)$, $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{f(x)-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{(x^2-9)(x^2-4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin(x-3)}{x-3} \cdot \frac{1}{(x+3)(x^2-4)} \right) =$ $= 1 \cdot \frac{1}{(3+3)(3^2-4)} = \frac{1}{30}$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{13}{2}}$, $x = 0$ sau $x = \sqrt{\frac{13}{2}}$; $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{13}{2}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ și $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in \left(-\sqrt{\frac{13}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{13}{2}}, +\infty\right)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $f\left(-\sqrt{\frac{13}{2}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{13}{2}}\right) = -\frac{13}{4}$, $f(0) = 39$, f continuă pe \mathbb{R} , f strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ și pe $\left(0, \sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ și f strict crescătoare pe $\left(-\sqrt{\frac{13}{2}}, 0\right)$ și pe $\left(\sqrt{\frac{13}{2}}, +\infty\right)$, deci ecuația $f(x) = m$ are exact patru soluții reale $\Leftrightarrow m \in \left(-\frac{13}{4}, 39\right)$	3p 2p
2.a)	$\int_1^2 \frac{f(x)}{\arctg x} dx = \int_1^2 2x dx = x^2 \Big _1^2 =$ $= 4 - 1 = 3$	3p 2p
b)	$\int_0^{\sqrt{3}} f(x) dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2 + 1)' \arctg x dx = (x^2 + 1) \arctg x \Big _0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x^2 + 1} dx = 4 \cdot \frac{\pi}{3} - x \Big _0^{\sqrt{3}} =$ $= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$, de unde obținem $a = \frac{3}{4}$	3p 2p
c)	$\int_{-1}^1 x f(x) dx = 2 \int_{-1}^1 x^2 \arctg x dx = 2 \int_{-1}^1 (-x)^2 \arctg(-x)(-1) dx = -2 \int_{-1}^1 x^2 \arctg x dx = - \int_{-1}^1 x f(x) dx$ $2 \int_{-1}^1 x f(x) dx = 0$, deci $\int_{-1}^1 x f(x) dx = 0$	3p 2p