

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*

Test 10

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $2,5 : 0,5 - 5 \left( 6,5 - \frac{11}{2} \right) = 0$ .
- 5p 2. Se consideră  $x_1$  și  $x_2$  soluțiile ecuației  $x^2 + mx + 1 = 0$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$ , știind că  $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 1$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $1 + \sqrt{x-2} = 3$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-4,6)$ ,  $B(4,6)$  și  $C(-4,0)$ . Determinați perimetrul triunghiului  $ABC$ .
- 5p 6. Calculați  $\cos A$ , știind că  $A$  este unghi ascuțit astfel încât  $\sin A = \frac{4}{5}$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ .
- 5p a) Arătați că  $\det(A + I_2) = 5$ .
- 5p b) Arătați că  $A \cdot A = 4A$ .
- 5p c) Demonstrați că există o infinitate de matrice  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , pentru care  $A \cdot X = X \cdot A$ .
- 2) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = \frac{xy + x + y - 1}{2}$ .
- 5p a) Arătați că  $1 * 2 = 2$ .
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui  $x$  pentru care  $x * x \leq 1$ .
- 5p c) Calculați  $(-1) * 0 * 1 * \dots * 2020$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2 \ln x$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că  $\ln \frac{2}{3} \leq -\frac{5}{18}$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{2020} - 2020x + 1$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^1 (f(x) + 2020x - 1) dx = \frac{1}{2021}$ .
- 5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției  $f$  este convexă pe  $[1, +\infty)$ .
- 5p c) Calculați  $\int_0^1 (f(-x) - f(x)) e^x dx$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică *M\_tehnologic***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Test 10**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$2,5 : 0,5 - 5 \left( 6,5 - \frac{11}{2} \right) = 25 : 5 - 5(6,5 - 5,5) =$ $= 5 - 5 \cdot 1 = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.</b>	$x_1 + x_2 = -m, x_1 x_2 = 1$ $-m + 2 \cdot 1 = 1$ , deci $m = 1$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>3.</b>	$\sqrt{x-2} = 3-1 \Rightarrow x-2 = 4$ $x = 6$ , care convine	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre, numerele divizibile cu 10 sunt: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 și 90, deci sunt 9 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	<b>2p</b> <b>2p</b> <b>1p</b>
<b>5.</b>	$AB = 8, AC = 6, BC = 10$ $P_{ABC} = 6 + 8 + 10 = 24$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>6.</b>	Unghiul $A$ este ascuțit $\Rightarrow \cos A > 0$ și, cum $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ , obținem $\cos A = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} =$ $= \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$A + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + I_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 =$ $= 8 - 3 = 5$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 12 & 12 \end{pmatrix} =$ $= 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 4A$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , deci $AX = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ 3x+3z & 3y+3t \end{pmatrix}$ și $XA = \begin{pmatrix} x+3y & x+3y \\ z+3t & z+3t \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x+z & y+t \\ 3x+3z & 3y+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & x+3y \\ z+3t & z+3t \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = 3y$ și $x + 2y = t \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x+2y \end{pmatrix}$ , unde $x$ și $y$ sunt numere reale, deci există o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A \cdot X = X \cdot A$	<b>3p</b> <b>2p</b>

<b>2.a)</b>	$1 * 2 = \frac{1 \cdot 2 + 1 + 2 - 1}{2} =$	<b>3p</b>
	$= \frac{4}{2} = 2$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\frac{x^2 + 2x - 1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 1) \leq 0$	<b>3p</b>
	$x \in [-3, 1]$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$(-1) * x = -1$ , unde $x$ este număr real	<b>2p</b>
	$(-1) * 0 * 1 * \dots * 2020 = (-1) * (0 * 1 * \dots * 2020) = -1$	<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} =$	<b>3p</b>
	$= \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}, x \in (0, +\infty)$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$	<b>1p</b>
	$f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in (0, 1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0, 1]$	<b>2p</b>
	$f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1, +\infty)$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	Pentru orice $x \in (0, +\infty)$ , $f(x) \geq f(1)$ și, cum $f(1) = 1$ , obținem $x^2 - 2 \ln x \geq 1$	<b>2p</b>
	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \ln \frac{2}{3} \geq 1$ , deci $2 \ln \frac{2}{3} \leq \frac{4}{9} - 1$ , de unde obținem $\ln \frac{2}{3} \leq -\frac{5}{18}$	<b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 (f(x) + 2020x - 1) dx = \int_0^1 x^{2020} dx = \frac{x^{2021}}{2021} \Big _0^1 =$	<b>3p</b>
	$= \frac{1^{2021} - 0^{2021}}{2021} = \frac{1}{2021}$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă oarecare a funcției $f$ , deci $F'(x) = f(x)$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b>
	$F''(x) = f'(x) = 2020x^{2019} - 2020 = 2020(x^{2019} - 1) \geq 0$ , pentru orice $x \in [1, +\infty)$ , deci orice primitivă $F$ a funcției $f$ este convexă pe $[1, +\infty)$	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$\int_0^1 (f(-x) - f(x)) e^x dx = \int_0^1 4040x e^x dx = 4040 \int_0^1 x e^x dx = 4040x e^x \Big _0^1 - 4040 \int_0^1 e^x dx =$	<b>3p</b>
	$= 4040e - 4040e^x \Big _0^1 = 4040e - 4040e + 4040 = 4040$	<b>2p</b>