

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul real a , $a > 1$, pentru care numerele $a - 1$, 3 și $a + 7$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p 2. Determinați suma absciselor punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x - 3$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2} - 3^x - 8 = 0$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să verifice inegalitatea $C_n^2 \leq 3C_n^1$.
- 5p 5. Determinați numerele reale m , $m \neq 2$, pentru care vectorii $\vec{u} = 4\vec{i} + m\vec{j}$ și $\vec{v} = (m - 2)\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p 6. Determinați perimetrul triunghiului ABC , știind că $AB = 5$, $AC = 4$ și $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} (m^2 - 1)x + my + 4z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ mx + 3y + z = -1 \end{cases}, \text{ unde } m \text{ este număr real.}$$

- 5p a) Determinați numărul real m pentru care tripletul $(-1, 0, 1)$ este soluție a sistemului de ecuații.
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care sistemul de ecuații admite soluție unică.
- 5p c) Determinați numerele $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-7, 2\}$, pentru care sistemul de ecuații admite soluția (x_0, y_0, z_0) , cu $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{Z}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = x + y + 11xy$.
- 5p a) Demonstrați că $x \circ y = 11\left(x + \frac{1}{11}\right)\left(y + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Determinați numerele reale x , pentru care $x \circ x = \frac{8}{11}$.
- 5p c) Calculați partea întreagă a numărului $a = \left(1 - \frac{1}{11}\right) \circ \left(1 - \frac{2}{11}\right) \circ \left(1 - \frac{3}{11}\right) \circ \left(1 - \frac{4}{11}\right)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \sqrt{x} - 1$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(1, -\frac{1}{3}\right)$.
- 5p c) Demonstrați că $x(2\sqrt{x} - 3) \geq -1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră funcția $f_n: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{x^n + 1}$.
- 5p a) Determinați primitiva $G: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x^3 + 1)f_3(x)$, știind că $G(0) = 2020$.

5p b) Calculați $\int_0^1 f_1(x) dx$.

5p c) Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x) dx \leq \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n .

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$3^2 = (a-1)(a+7) \Leftrightarrow a^2 + 6a - 16 = 0$ Cum a este număr real, $a > 1$, obținem $a = 2$	3p 2p
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 6 = -x - 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0$ Cum $\Delta > 0$, suma absciselor punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor f și g este -1	3p 2p
3.	$3^x(3^2 - 1) = 8 \Leftrightarrow 3^x = 1$ $x = 0$	3p 2p
4.	Mulțimea A are 8 elemente, deci sunt 8 cazuri posibile $\frac{n(n-1)}{2} \leq 3n \Leftrightarrow n(n-7) \leq 0$ și, cum $n \in A$, obținem $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, deci sunt 6 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$	2p 2p 1p
5.	$\frac{4}{m-2} = \frac{m}{2} \Rightarrow m^2 - 2m - 8 = 0$ $m = -2$ sau $m = 4$, care convin	2p 3p
6.	$\cos A = \frac{1}{2}$ și $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$, deci $BC = \sqrt{21}$ $P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 9 + \sqrt{21}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\begin{cases} -(m^2 - 1) + 4 = 1 \\ -1 + 1 = 0 \\ -m + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4 \\ m = 2 \end{cases}$ $m = 2$	3p 2p
b)	Matricea sistemului de ecuații este $A = \begin{pmatrix} m^2 - 1 & m & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $\det A = -(m+7)(m-2)$, pentru orice număr real m Sistemul de ecuații admite soluție unică $\Leftrightarrow \det A \neq 0$, deci $m \in \mathbb{R} \setminus \{-7, 2\}$	3p 2p
c)	$m \in \mathbb{Z} \setminus \{-7, 2\} \Rightarrow \det A \neq 0$ și sistemul de ecuații are soluția unică $\left(\frac{1}{m+7}, -\frac{m+3}{m+7}, \frac{m+2}{m+7} \right)$ Cum $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-7, 2\}$, numerele $\frac{1}{m+7}$, $-\frac{m+3}{m+7}$ și $\frac{m+2}{m+7}$ sunt întregi $\Leftrightarrow m = -8$ sau $m = -6$	3p 2p

2.a)	$x \circ y = 11xy + x + y + \frac{1}{11} - \frac{1}{11} = 11x\left(y + \frac{1}{11}\right) + \left(y + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11} =$ $= \left(y + \frac{1}{11}\right)(11x + 1) - \frac{1}{11} = 11\left(x + \frac{1}{11}\right)\left(y + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	3p 2p
b)	$11\left(x + \frac{1}{11}\right)^2 - \frac{1}{11} = \frac{8}{11} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{11}\right)^2 = \frac{9}{121}$ $x = -\frac{4}{11} \text{ sau } x = \frac{2}{11}$	3p 2p
c)	$a = 11^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{11}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{11} + \frac{1}{11}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{11} + \frac{1}{11}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{11} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11} = 11^3 \cdot 1 \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{11} - \frac{1}{11} = 720 - \frac{1}{11}$ $719 < 720 - \frac{1}{11} < 720, \text{ deci partea întregă a numărului } a \text{ este egală cu } 719$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x\right)' =$ $= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{x} - 1, \quad x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$f'(1) = 0, \quad f(1) = -\frac{1}{3}$ <p>Ecuția tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, adică $y = -\frac{1}{3}$</p>	2p 3p
c)	$f'(1) = 0, \quad f'(x) \leq 0, \text{ pentru orice } x \in (0, 1] \Rightarrow f \text{ este descrescătoare pe } (0, 1] \text{ și } f'(x) \geq 0,$ <p>pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1, +\infty)$</p> $\text{Pentru orice } x \in (0, +\infty), \quad f(x) \geq f(1) \Rightarrow \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x \geq -\frac{1}{3}, \text{ de unde obținem } x(2\sqrt{x} - 3) \geq -1$	2p 3p
2.a)	$g(x) = x^3, \quad x \in (-1, +\infty), \text{ deci } G(x) = \frac{x^4}{4} + c, \text{ unde } c \in \mathbb{R}$ <p>Cum $G(0) = 2020$, obținem $c = 2020$, deci $G(x) = \frac{x^4}{4} + 2020$</p>	3p 2p
b)	$\int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = (x - \ln(x+1)) \Big _0^1 =$ $= 1 - \ln 2$	3p 2p
c)	$f_n(x) = \frac{x^n}{x^n + 1} \leq x^n, \text{ pentru orice număr natural nenul } n \text{ și orice } x \in [0, 1]$ $\int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 x^n dx \text{ și, cum } \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}, \text{ obținem } \int_0^1 f_n(x) dx \leq \frac{1}{n+1}, \text{ pentru orice număr}$ <p>natural nenul n</p>	3p 2p