Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați partea reală a numărului complex $z=(3+2i)(3-2i)-(4-i)$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-3$. Calculați $(f\circ g)(2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{2^{6x}}=16$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor un număr impar.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AD=6$, $AB=4$ și $m(\sphericalangle ADC)=120^\circ$. Determinați modulul vectorului $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=60$, $AC=80$ și $BC=100$. Calculați lungimea înălțimii AD a triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a+1 & 1 & -2\\ a-1 & -1 & 1\\ 2a & -2 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}(2a+1)x+y-2z=a\\ (a-1)x-y+z=a+1\\ 2ax-2y+z=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care există y_0 și z_0, numere reale, astfel încât $(2,y_0,z_0)$ să fie soluție a sistemului de ecuații.

2. Pe mulțimea $G=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=\sqrt[3]{x^{\log_2 y}}$.

5p **a)** Arătați că $2*64=4$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Determinați $x\in G$ care sunt egale cu simetricele lor în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(5)=6$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n$.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f'(x)=0$ are trei soluții reale.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

5p **a)** Determinați primitiva G a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(1+e^x)f(x)$ pentru care $G(0)=0$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx = 0$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=(3+2i)(3-2i)-(4-i)=3^2-(2i)^2-4+i=9+i$	**2p**
	Partea reală a numărului complex z este egală cu 9	**3p**
2.	$g(2)=1$	**2p**
	$(f\circ g)(2)=f(g(2))=3\cdot 1+2=5$	**3p**
3.	$2^{\frac{6x}{3}}=2^4 \Leftrightarrow 2x=4$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre care au produsul cifrelor un număr impar are $5\cdot 5\cdot 5=125$ de elemente, deci sunt 125 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{125}{900}=\frac{5}{36}$	**1p**
5.	$ABCD$ este paralelogram, deci $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$	**2p**
	$AC^2=AD^2+DC^2-2\cdot AD\cdot DC\cdot\cos(\sphericalangle ADC)\Rightarrow AC=2\sqrt{19}$	**3p**
6.	$BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow \Delta ABC$ este dreptunghic în A	**2p**
	$AD=\frac{AB\cdot AC}{BC}=48$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-3+0+2-4-(-6)-0=1$	**3p**
b)	$\det(A(a))=3a-2$, pentru orice număr real a	**2p**
	Matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a))=0$, deci $a=\frac{2}{3}$	**3p**
c)	Dacă $a=\frac{2}{3}$, sistemul de ecuații este incompatibil	**1p**
	Dacă $a\neq\frac{2}{3}$, atunci $\det(A(a))\neq 0$, deci sistemul de ecuații este compatibil determinat și, cum există y_0 și z_0 astfel încât $(2,y_0,z_0)$ este soluție a sistemului de ecuații, obținem $\frac{2(2a+1)}{3a-2}=2$	**3p**
	$a=3$, care convine	**1p**

2.a)	$2*64=\sqrt[3]{2^{\log_2 64}}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{2^6}=2^2=4$	**2p**
b)	$x*y=\sqrt[3]{x^{\log_2 y}}=x^{\frac{1}{3}\log_2 y}=\left(2^{\log_2 x}\right)^{\frac{1}{3}\log_2 y}=2^{\frac{1}{3}\log_2 x\log_2 y}=$	**2p**
	$=2^{\frac{1}{3}\log_2 y\log_2 x}=\left(2^{\log_2 y}\right)^{\frac{1}{3}\log_2 x}=y^{\frac{1}{3}\log_2 x}=y*x$, pentru orice $x,y\in G$, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**3p**
c)	$x*8=8*x=x$, pentru orice $x\in G\Rightarrow e=8$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**1p**
	$x*x=8\Leftrightarrow x^{\log_2 x}=8^3\Leftrightarrow \log_2 x^{\log_2 x}=\log_2\left(8^3\right)\Leftrightarrow\left(\log_2 x\right)^2=9$	**2p**
	$\log_2 x=-3$ sau $\log_2 x=3$, deci $x=\frac{1}{8}$ sau $x=8$, care convin	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(x-4)(x-3)(x-2)+(x-5)\left((x-4)(x-3)(x-2)\right)'$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$f'(5)=(5-4)(5-3)(5-2)+0=6$	**2p**
b)	$\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}=\frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)}=\frac{n-1}{n-5}$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 6$	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n-5}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{4}{n-5}\right)^{\frac{n-5}{4}}\right)^{\frac{4n}{n-5}}=e^4$	**3p**
c)	$f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=1$	**2p**
	f este derivabilă, deci, conform teoremei lui Rolle pe $[2,3]$, $[3,4]$ și $[4,5]$, ecuația $f'(x)=0$ are o soluție reală în fiecare dintre intervalele $(2,3)$, $(3,4)$ și $(4,5)$	**3p**
2.a)	$g(x)=\left(1+e^x\right)f(x)=1-e^x\Rightarrow\int g(x)dx=x-e^x+\mathcal{C}\Rightarrow G(x)=x-e^x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$G(0)=0$, deci $c=1$, de unde obținem $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=x-e^x+1$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1-e^x}{1+e^x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{2e^x}{1+e^x}\right)dx=\left(x-2\ln\left(1+e^x\right)\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-2\ln(1+e)+2\ln 2=1+2\ln\frac{2}{e+1}$	**2p**
c)	$\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx=\int_1^{-1} f(-x)\cos(-x)\cdot(-1)dx=\int_{-1}^1 f(-x)\cos x dx=\int_{-1}^1\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\cos x dx=$ $=\int_{-1}^1\frac{e^x-1}{e^x+1}\cos x dx=-\int_{-1}^1\frac{1-e^x}{e^x+1}\cos x dx=-\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx$	**3p**
	$2\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx=0$, deci $\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx=0$	**2p**