

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{tehnologic}$**

**Testul 9**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați suma primilor patru termeni ai progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$  în care  $a_2 = 5$  și  $a_3 = 8$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x - 8$ . Determinați numerele reale  $a$  pentru care  $a \cdot f(a) = f(1)$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_5(25 - x) = \log_5(x + 5)$ .
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifre din mulțimea  $A = \{2, 3, 5, 9\}$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră dreapta  $d$  de ecuație  $y = 2x + a$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numărul real  $a$  știind că punctul  $A(2, 3)$  aparține dreptei  $d$ .
- 5p** 6. Arătați că  $4 \sin 60^\circ (\operatorname{tg} 60^\circ - \cos 30^\circ) = 3$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B(a) = \begin{pmatrix} a & a \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det A = -5$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $B(1) \cdot B(-1) + 3A = 4B(a)$ .
- 5p** c) Determinați matricea  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  cu proprietatea că  $X \cdot (A - 2I_2) = B(0)$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = (2x - y + 1)(2y - x + 1)$ .
- 5p** a) Arătați că  $3 * 4 = 18$ .
- 5p** b) Demonstrați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
- 5p** c) Determinați perechile  $(m, n)$  de numere naturale pentru care  $(2m) * n = 13$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (-5, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x + 7}{x + 5}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{3}{(x + 5)^2}$ ,  $x \in (-5, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției  $f$  în care tangenta la graficul funcției  $f$  este paralelă cu dreapta de ecuație  $y = 3x + 5$ .
2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_1^3 (f(x) + 2\sqrt{x}) dx = 8$ .
- 5p** b) Arătați că funcția  $f$  este o primitivă a funcției  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$ .
- 5p** c) Calculați  $\int_1^2 \frac{1}{f(x^2)} dx$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică *M\_tehnologic***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Testul 9**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

|           |  |                        |
|-----------|--|------------------------|
| <b>1.</b> | $r = 3 \Rightarrow a_1 = 2, a_4 = 11$<br>$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 5 + 8 + 11 = 26$   | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>2.</b> | $f(a) = 3a - 8, f(1) = -5$<br>$a(3a - 8) = -5 \Leftrightarrow 3a^2 - 8a + 5 = 0$ , de unde obținem $a = 1$ sau $a = \frac{5}{3}$   | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>3.</b> | $25 - x = x + 5$<br>$x = 10$ , care convine  | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>4.</b> | Cifra unităților poate fi aleasă în 4 moduri<br>Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor poate fi aleasă în câte 3 moduri, deci se pot forma $4 \cdot 3 = 12$ numere  | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>5.</b> | $3 = 2 \cdot 2 + a$<br>$a = -1$  | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>6.</b> | $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$<br>$4 \sin 60^\circ (\operatorname{tg} 60^\circ - \cos 30^\circ) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$ | <b>3p</b><br><b>2p</b> |

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

|             |  |                        |
|-------------|--|------------------------|
| <b>1.a)</b> | $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) =$<br>$= -6 + 1 = -5$   | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $B(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, B(-1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow B(1)B(-1) + 3A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 15 & 33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}$<br>$\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 12 & 24 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} a & a \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ , de unde obținem $a = 2$ | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - 2I_2) = 1$ , deci matricea $A - 2I_2$ este inversabilă și<br>$(A - 2I_2)^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$<br>$X = B(0) \cdot (A - 2I_2)^{-1}$ , de unde obținem $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$   | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>2.a)</b> | $3 * 4 = (2 \cdot 3 - 4 + 1)(2 \cdot 4 - 3 + 1) =$<br>$= 3 \cdot 6 = 18$   | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $x * y = (2x - y + 1)(2y - x + 1) = (2y - x + 1)(2x - y + 1) =$  | <b>2p</b>              |

|    |   |    |
|----|---|----|
|    | $= y * x$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$ , deci legea de compoziție „*” este comutativă                   | 3p |
| c) | $(2m) * n = (4m - n + 1)(2n - 2m + 1)$ , pentru orice numere naturale $m$ și $n$                                  | 2p |
|    | $(4m - n + 1)(2n - 2m + 1) = 13$ și, cum $m$ și $n$ sunt numere naturale, obținem perechile $(2, 8)$ sau $(4, 4)$ | 3p |

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.a) | $f'(x) = \frac{2(x+5) - (2x+7)}{(x+5)^2} =$  | 3p |
|      | $= \frac{2x+10-2x-7}{(x+5)^2} = \frac{3}{(x+5)^2}$ , $x \in (-5, +\infty)$   | 2p |
| b)   | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+7}{x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{7}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{5}{x}\right)} =$ | 2p |
|      | $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{7}{x}}{1 + \frac{5}{x}} = 2$ , deci dreapta de ecuație $y = 2$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției $f$           | 3p |
| c)   | Tangenta la graficul funcției $f$ în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 3x + 5 \Leftrightarrow f'(a) = 3$ , $a \in (-5, +\infty)$                                | 2p |
|      | $\frac{3}{(a+5)^2} = 3$ și, cum $a \in (-5, +\infty)$ , obținem $a = -4$   | 3p |
| 2.a) | $\int_1^3 (f(x) + 2\sqrt{x}) dx = \int_1^3 (x+2) dx = \left. \left( \frac{x^2}{2} + 2x \right) \right _1^3 =$  | 3p |
|      | $= \frac{21}{2} - \frac{5}{2} = 8$   | 2p |
| b)   | $f'(x) = (x - 2\sqrt{x} + 2)' = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 =$   | 3p |
|      | $= 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = g(x)$ , pentru orice $x \in (0, +\infty)$ , deci funcția $f$ este o primitivă a funcției $g$                                   | 2p |
| c)   | $\int_1^2 \frac{1}{f(x^2)} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx = \int_1^2 \frac{(x-1)'}{(x-1)^2 + 1} dx = \arctg(x-1) \Big _1^2 =$   | 3p |
|      | $= \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}$  | 2p |