

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_3 = 5$ și $a_5 = 11$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$. Determinați numărul real a știind că $f(a) = f(a+1)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - x + 13} = x + 1$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele strict mai mici decât 3.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$, $B(-1,1)$ și $C(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care dreptele OC și AB sunt perpendiculare.
- 5p 6. Arătați că, pentru orice număr real x , $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1+5x & -2x \\ 10x & 1-4x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 2$.
- 5p b) Demonstrați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y + xy)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați perechile de numere întregi (m, n) pentru care matricea $A(m)$ este inversa matricei $A(n)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + x + 2ay$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $1 \circ 0 = 1$, pentru orice număr real a .
- 5p b) Determinați numărul real a , știind că $x \circ 1 > 4$ dacă și numai dacă $x \in (3, +\infty)$.
- 5p c) Arătați că legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă dacă și numai dacă $a = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{e^x}$.
- 5p a) Arătați că $e^x (f(x) + f'(x)) = 1$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că dreapta de ecuație $y = x$ este tangentă la graficul funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^{\pi} f(x) dx = 2$.
- 5p b) Calculați $\int_0^{\pi} xf(x) dx$.
- 5p c) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 f^2(x) dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_{șt-nat}*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_4 = \frac{a_3 + a_5}{2} = \frac{5 + 11}{2} = 8$	3p 2p
2.	$a^2 + 1 = (a + 1)^2 + 1 \Leftrightarrow a^2 + 1 = a^2 + 2a + 2 \Leftrightarrow 2a + 1 = 0$ $a = -\frac{1}{2}$	3p 2p
3.	$x^2 - x + 13 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 3x = 12$ $x = 4$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Cifra zecilor poate fi aleasă în 2 moduri, iar pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 3 moduri, deci sunt $2 \cdot 3 = 6$ cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$	2p 2p 1p
5.	$m_{AB} = 1$ și $m_{OC} = \frac{a}{3}$, unde a este număr real $OC \perp AB \Leftrightarrow m_{AB} \cdot m_{OC} = -1 \Leftrightarrow \frac{a}{3} = -1$, de unde obținem $a = -3$	2p 3p
6.	$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} + \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} =$ $= 2 \cos x \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \cos x \cdot \frac{1}{2} = \cos x$, pentru orice număr real x	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 10 & -3 \end{vmatrix} =$ $= 6 \cdot (-3) - 10 \cdot (-2) = 2$	2p 3p
b)	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} (1+5x)(1+5y) - 20xy & -2y(1+5x) - 2x(1-4y) \\ 10x(1+5y) + 10y(1-4x) & -20xy + (1-4x)(1-4y) \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1+5x+5y+5xy & -2x-2y-2xy \\ 10x+10y+10xy & 1-4x-4y-4xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5(x+y+xy) & -2(x+y+xy) \\ 10(x+y+xy) & 1-4(x+y+xy) \end{pmatrix} = A(x+y+xy),$ pentru orice numere reale x și y	3p 2p

c)	$(A(m))^{-1} = A(n) \Leftrightarrow A(m)A(n) = I_2 \Leftrightarrow A(m+n+mn) = A(0) \Leftrightarrow m+n+mn=0$, unde m și n sunt numere întregi, $m \neq -1$ și $n \neq -1$ $mn+m+n+1=1 \Leftrightarrow (m+1)(n+1)=1$ și, cum m și n sunt numere întregi, obținem $m=n=-2$ sau $m=n=0$, deci perechile sunt $(-2,-2)$ și $(0,0)$, care convin	3p 2p
2.a)	$1 \circ 0 = 1 \cdot 0 + 1 + 2 \cdot a \cdot 0 = 0 + 1 + 0 = 1$, pentru orice număr real a	3p 2p
b)	$x \circ 1 > 4 \Leftrightarrow x + x + 2a > 4 \Leftrightarrow 2x > 4 - 2a \Leftrightarrow x > 2 - a \Leftrightarrow x \in (2 - a, +\infty)$ $2 - a = 3$, deci $a = -1$	3p 2p
c)	Legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă $\Leftrightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, pentru orice numere reale x, y și $z \Leftrightarrow (xy + x + 2ay)z + xy + x + 2ay + 2az = x(yz + y + 2az) + x + 2a(yz + y + 2az)$ Obținem $xz + 2az = 2axz + 4a^2z \Leftrightarrow z(x + 2a)(1 - 2a) = 0$, pentru orice numere reale x și z , deci $a = \frac{1}{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}, x \in \mathbb{R}$ $e^x(f(x) + f'(x)) = e^x\left(\frac{x}{e^x} + \frac{1-x}{e^x}\right) = 1$, pentru orice număr real x	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ Cum $f(0) = 0$ și $f'(0) = 1$, tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$ are ecuația $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, deci este dreapta de ecuație $y = x$	2p 3p
2.a)	$\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big _0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$	3p 2p
b)	$\int_0^{\pi} xf(x) dx = \int_0^{\pi} x \sin x dx = -\int_0^{\pi} x(\cos x)' dx = -x \cos x \Big _0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -\pi \cos \pi + \sin x \Big _0^{\pi} = -\pi \cdot (-1) + 0 - 0 = \pi$	3p 2p
c)	$\int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 (f(x) - f^2(x)) dx = \int_0^1 \sin x(1 - \sin x) dx$ Pentru orice $x \in [0, 1]$, $\sin x(1 - \sin x) \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 \sin x(1 - \sin x) dx \geq 0$, deci $\int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 f^2(x) dx$	2p 3p