Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}>\frac{3}{4}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+18$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficului funcției $f\circ f$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{3-x}-2^{2-x}+2^{5-x}=9$.

5p **4.** Determinați termenul care **nu** îl conține pe x din dezvoltarea $\left(x^3+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$, unde $x\in(0,+\infty)$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(a,1)$ și $B(-2,5)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că mijlocul segmentului AB aparține dreptei de ecuație $y=2x+3$.

5p **6.** Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC, știind că $\operatorname{tg} C=1$ și că triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 3.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(3))=10$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, rangul matricei $A(n)$ este egal cu 3.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr natural m, $m\geq 2$, inversa matricei $A(m)$ **nu** are toate elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea $M=(2,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{xy-4}{x+y-4}$.

5p **a)** Arătați că $8\circ 8=5$.

5p **b)** Arătați că $(x+2)\circ(y+2)>(x+y)\circ 4$, pentru orice $x,y\in M$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $x\in M$ și n este număr natural, $n\geq 2$, astfel încât $\underbrace{x\circ x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de } 2^n \text{ ori } x}=2^n-\frac{1}{2^n}$, atunci x este pătratul unui număr natural.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x-3)-2\ln\left(x^2-9\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3(1-x)}{x^2-9}$, $x\in(3,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\left((x-3)f(x)\right)=0$.

2. Se consideră funcţia $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^{\frac{3}{2}}\left(f(x)-\dfrac{x^2}{x^2-4}\right)dx=\dfrac{5}{8}$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)+f(-x)\right)dx=4(1-\ln 3)$.

5p **c)** Determinați $a\in\left(0,\sqrt{3}\right)$, pentru care $\int_a^{\sqrt{3}}\sqrt{x-f(x)}\,dx=\sqrt{3}-1$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}=1\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^5}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=$	**3p**
	$=\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{3^5}\right)>\frac{3}{4}$	**2p**
2.	$(f\circ f)(x)=0\Leftrightarrow -3f(x)+18=0\Leftrightarrow f(x)=6$	**3p**
	$-3x+18=6\Leftrightarrow x=4$, deci abscisa punctului de intersecție a graficului funcției $f\circ f$ cu axa Ox este egală cu 4	**2p**
3.	$2^{2-x}\left(2-1+2^3\right)=9\Leftrightarrow 2^{2-x}=1$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	$T_{k+1}=C_{14}^k\left(x^3\right)^{14-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_{14}^k x^{42-3k-\frac{k}{2}}=C_{14}^k x^{\frac{84-7k}{2}}$, unde $k\in\{0,1,2,\ldots,14\}$	**3p**
	$\frac{84-7k}{2}=0\Leftrightarrow k=12$, deci $T_{13}=C_{14}^{12}=91$ nu îl conține pe x	**2p**
5.	Punctul $M\left(\frac{a-2}{2},3\right)$ este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$3=2\cdot\frac{a-2}{2}+3\Leftrightarrow a=2$	**2p**
6.	În ΔABC, $\text{tg}\,C=1\Rightarrow \sphericalangle C=\frac{\pi}{4}$, deci $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$2R=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow AB=2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(3)=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&4&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(3))=\begin{vmatrix}3&1&1\\1&4&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=12+1+(-1)-4-(-3)-1=10$	**3p**
b)	$\det(A(a))=a^2+a-2$, pentru orice număr real a, deci $\det(A(a))=0\Leftrightarrow a=1$ sau $a=-2$	**3p**
	Cum $\det(A(n))\neq 0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, rangul matricei $A(n)$ este egal cu 3, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**2p**

c)	Pentru orice număr natural $m\ge 2$, $A(m)$ este inversabilă, deci $A^{-1}(m)$ are toate elementele numere întregi dacă $\det(A(m))=-1$ sau $\det(A(m))=1$	**3p**
	Cum $m\ge 2$, obținem $\det(A(m))=m^2+m-2\ge 4$, deci $A^{-1}(m)$ **nu** are toate elementele numere întregi	**2p**
2.a)	$8\circ 8=\dfrac{8\cdot 8-4}{8+8-4}=$	**3p**
	$=\dfrac{60}{12}=5$	**2p**
b)	$(x+2)\circ(y+2)=\dfrac{xy+2x+2y}{x+y}$, $(x+y)\circ 4=\dfrac{4x+4y-4}{x+y}$, pentru orice $x,y\in M$	**2p**
	$(x+2)\circ(y+2)-(x+y)\circ 4=\dfrac{xy-2x-2y+4}{x+y}=\dfrac{(x-2)(y-2)}{x+y}$, pentru orice $x,y\in M$ și, cum $x>2$ și $y>2$, obținem că $(x+2)\circ(y+2)>(x+y)\circ 4$, pentru orice $x,y\in M$	**3p**
c)	$x\circ x=\dfrac{x^2-4}{2x-4}=\dfrac{x+2}{2}$, $\underbrace{x\circ x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de } 2^n \text{ ori } x}=\dfrac{x+2^{n+1}-2}{2^n}$, unde $x\in M$ și n este număr natural, $n\ge 2$	**3p**
	$\dfrac{x+2^{n+1}-2}{2^n}=2^n-\dfrac{1}{2^n}\Rightarrow x=2^{2n}-2\cdot 2^n+1\Rightarrow x=\left(2^n-1\right)^2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1}{x-3}-2\cdot\dfrac{2x}{x^2-9}=$	**3p**
	$=\dfrac{x+3-4x}{x^2-9}=\dfrac{3(1-x)}{x^2-9}$, $x\in(3,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(3,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(3,+\infty)$, deci f este injectivă	**2p**
	Cum f este continuă pe $(3,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, obținem că f este surjectivă, deci f este bijectivă	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to 3}\left((x-3)f(x)\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{x-3}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f'(x)}{\left(\frac{1}{x-3}\right)'}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-\frac{3(x-1)}{x^2-9}}{-\frac{1}{(x-3)^2}}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3(x-1)(x-3)^2}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3(x-1)(x-3)}{x+3}=0$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}}\left(f(x)-\frac{x^2}{x^2-4}\right)dx=\int_1^{\frac{3}{2}}x\,dx=\frac{x^2}{2}\Bigg\vert_1^{\frac{3}{2}}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9}{4}-1\right)=\dfrac{5}{8}$	**2p**

b)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{x^2-4}dx=2\int_{-1}^{1}\frac{x^2-4+4}{x^2-4}dx=2\int_{-1}^{1}\left(1+\frac{4}{x^2-4}\right)dx=2\left(x+\ln\left\|\frac{x-2}{x+2}\right\|\right)\Big\|_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=2\left(1+\ln\frac{1}{3}+1-\ln 3\right)=4(1-\ln 3)$	**2p**
c)	$\int_{a}^{\sqrt{3}}\sqrt{x-f(x)}\,dx=\int_{a}^{\sqrt{3}}\sqrt{x-x-\frac{x^2}{x^2-4}}\,dx=\int_{a}^{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx=-\sqrt{4-x^2}\Big\|_{a}^{\sqrt{3}}=\sqrt{4-a^2}-1$, $a\in\left(0,\sqrt{3}\right)$	**3p**
	$\sqrt{4-a^2}=\sqrt{3}\Leftrightarrow a^2=1$ și, cum $a\in\left(0,\sqrt{3}\right)$, obținem $a=1$	**2p**