

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați suma primilor patru termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, în care $a_1 = 2$ și $a_4 = 11$.
- 5p 2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 4$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x+2} - 2 = 0$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie format doar din cifre pare.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,5)$ și $B(3,1)$. Determinați coordonatele simetricului punctului A față de punctul B .
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 8$, $AC = 6$ și $BC = 10$. Calculați $\cos B$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det(A + I_3) = 4$.
- 5p b) Demonstrați că $A \cdot A \cdot A + A = 2A \cdot A$.
- 5p c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care matricea $B(x) = A + xI_3$ este inversabilă.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + ay + 1$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $2020 * 0 = 2021$, pentru orice număr real a .
- 5p b) Determinați numărul real a , știind că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p c) Pentru $a = -1$, determinați numărul real x pentru care $4^x * 2^x = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$, $x \in (2, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $x = 3$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că funcția f' este crescătoare pe $(2, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^e \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{f(x)} dx = 1$.
- 5p b) Calculați $\int_1^2 f^2(x) dx$.
- 5p c) Demonstrați că $\int_0^{2020} f(x) dx \leq \int_0^a f(x) dx$, pentru orice $a \in [2020, +\infty)$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{(a_1 + a_4) \cdot 4}{2} =$ $= \frac{(2+11) \cdot 4}{2} = 26$	3p 2p
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x = 2x - 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$ Coordonatele punctului de intersecție sunt $x = 2$, $y = 0$	3p 2p
3.	$\sqrt[3]{x+2} = 2 \Leftrightarrow x+2 = 8$ $x = 6$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt $4 \cdot 5 = 20$ de numere care au cifrele pare, deci sunt 20 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$	2p 2p 1p
5.	B este mijlocul segmentului AC , unde $C(a, b)$ este simetricul punctului A față de punctul B , deci $3 = \frac{-1+a}{2} \Rightarrow a = 7$ $1 = \frac{5+b}{2} \Rightarrow b = -3$	3p 2p
6.	$BC^2 = AB^2 + AC^2$, deci $\triangle ABC$ este dreptunghic $\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$ $= 4 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 4$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $A \cdot A \cdot A + A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2A \cdot A$	2p 3p

c)	$B(x) = A + xI_3 = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1+x & 0 \\ 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(x)) = x(1+x)^2, \text{ pentru orice număr real } x$ $B(x) \text{ este inversabilă} \Leftrightarrow \det(B(x)) \neq 0 \Leftrightarrow x(1+x)^2 \neq 0, \text{ de unde obținem } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$	2p 3p
2.a)	$2020 * 0 = 2020 + a \cdot 0 + 1 =$ $= 2020 + 1 = 2021, \text{ pentru orice număr real } a$	3p 2p
b)	$(x * y) * z = (x + ay + 1) * z = x + ay + 1 + az + 1 = x + ay + az + 2, \text{ pentru orice numere reale } x, y$ $\text{și } z$ $x * (y * z) = x * (y + az + 1) = x + a(y + az + 1) + 1 = x + ay + a^2z + a + 1, \text{ pentru orice numere reale}$ $x, y \text{ și } z \text{ și, cum, legea de compoziție „*” este asociativă, obținem } a = 1$	2p 3p
c)	$x * y = x - y + 1, \text{ deci } 4^x - 2^x + 1 = 1$ $2^x(2^x - 1) = 0, \text{ de unde obținem } x = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2(x-1)(x-2) - (x-1)^2}{(x-2)^2} =$ $= \frac{(x-1)(2x-4-x+1)}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}, x \in (2, +\infty)$	3p 2p
b)	$f'(3) = 0, f(3) = 4$ $\text{Ecuația tangentei este } y - f(3) = f'(3)(x - 3), \text{ deci } y = 4$	2p 3p
c)	$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}, x \in (2, +\infty)$ $f''(x) > 0, \text{ pentru orice } x \in (2, +\infty), \text{ deci funcția } f' \text{ este crescătoare pe } (2, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_1^e \frac{\sqrt{x^2+1}}{f(x)} dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big _1^e =$ $= \ln e - \ln 1 = 1$	3p 2p
b)	$\int_1^2 f^2(x) dx = \int_1^2 x^2(x^2+1) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right) \Big _1^2 =$ $= \frac{32}{5} + \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{128}{15}$	3p 2p
c)	$\int_0^a f(x) dx - \int_0^{2020} f(x) dx = \int_0^{2020} f(x) dx + \int_{2020}^a f(x) dx - \int_0^{2020} f(x) dx = \int_{2020}^a f(x) dx, \text{ pentru orice}$ $a \in [2020, +\infty)$ $\text{Pentru orice } x \in [0, +\infty), f(x) \geq 0, \text{ deci, pentru orice } a \in [2020, +\infty), \int_{2020}^a f(x) dx \geq 0, \text{ de}$ $\text{unde obținem } \int_0^{2020} f(x) dx \leq \int_0^a f(x) dx$	3p 2p