

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Test 9**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Comparați numerele  $\log_2 16$  și  $\sqrt[3]{125}$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + (a+2)x + 2a + 1$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numerele reale  $a$  pentru care graficul funcției  $f$  este tangent axei  $Ox$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $5^{x^2-x-2} = 5^{3x-5}$ .
- 5p** 4. Demonstrați că numerele  $C_4^1$ ,  $A_4^2$  și  $A_5^2$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1,1)$ ,  $B(1,a)$  și  $C(4,2a+1)$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numărul real  $a$ , pentru care punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt coliniare.
- 5p** 6. Determinați raza cercului circumscris triunghiului  $MNP$ , știind că  $MN = 16$  și  $m(\sphericalangle P) = 30^\circ$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & -a \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} x + ay - z = a \\ x - y - az = -1, \\ ax - y + z = -1 \end{cases}$  unde  $a$  este număr real.

- 5p** a) Arătați că  $\det(A(1)) = -4$ .
- 5p** b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui  $a$  pentru care matricea  $A(a)$  este inversabilă.
- 5p** c) Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție  $(x_0, y_0, z_0)$  pentru care  $x_0 = y_0 = z_0$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 8}$ .
- 5p** a) Arătați că  $2020 * (-2020) = 2$ .
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „\*”.
- 5p** c) Știind că  $(\mathbb{R}, *)$  este grup, demonstrați că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + 8$  este morfism de la grupul  $(\mathbb{R}, *)$  la grupul  $(\mathbb{R}, +)$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (-2 + \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+4}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x)) = 2$ .
- 5p** b) Demonstrați că funcția  $f$  este descrescătoare pe intervalul  $(-2, +\infty)$ .
- 5p** c) Determinați  $x \in [-1, +\infty)$  pentru care  $f(x) \in \mathbb{Z}$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^2 \frac{x+1}{f(x)} dx = e^2 - 1$ .
- 5p** b) Calculați  $\int_0^1 e^{3x} f^2(x) dx$ .

- 5p** c) Se consideră numerele reale pozitive  $a$ ,  $b$  și  $c$ . Demonstrați că, dacă  $1 - \int_0^a \frac{f(x)}{x+1} dx$ ,  $1 - \int_0^b \frac{f(x)}{x+1} dx$  și  $1 - \int_0^c \frac{f(x)}{x+1} dx$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, atunci  $a$ ,  $b$  și  $c$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M\_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 9

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ Cum $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$ , obținem că $\log_2 16 < \sqrt[3]{125}$	2p 3p
2.	$\Delta = (a+2)^2 - 4(2a+1) = a^2 - 4a$ , unde $a$ este număr real Graficul funcției $f$ este tangent axei $Ox \Leftrightarrow \Delta = 0$ , deci $a = 0$ sau $a = 4$	2p 3p
3.	$x^2 - x - 2 = 3x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ $x = 1$ sau $x = 3$	3p 2p
4.	$C_4^1 = 4$ , $A_4^2 = 12$ și $A_5^2 = 20$ $12 = \frac{4+20}{2}$ , deci $C_4^1$ , $A_4^2$ și $A_5^2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	3p 2p
5.	$m_{AB} = \frac{a-1}{2}$ , $m_{BC} = \frac{a+1}{3}$ , unde $a$ este număr real $A$ , $B$ și $C$ sunt coliniare $\Rightarrow m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow 3a - 3 = 2a + 2$ , deci $a = 5$	2p 3p
6.	$\sin P = \frac{1}{2}$ $2R = \frac{MN}{\sin P} \Rightarrow R = 16$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -1 + 1 + (-1) - 1 - 1 - 1 = -4$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = -a(a^2 + 3)$ , pentru orice număr real $a$ Matricea $A(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0$ , deci $a \in \mathbb{R}^*$	2p 3p
c)	Dacă $(x_0, y_0, z_0)$ este soluție și $x_0 = y_0 = z_0$ , atunci $\begin{cases} x_0 + ax_0 - x_0 = a \\ x_0 - x_0 - ax_0 = -1, \text{ unde } a \text{ este număr} \\ ax_0 - x_0 + x_0 = -1 \end{cases}$ real Obținem $ax_0 = 1$ și $ax_0 = -1$ , ceea ce este imposibil	2p 3p
2.a)	$2020 * (-2020) = \sqrt[3]{2020^3 + (-2020)^3 + 8} = \sqrt[3]{2020^3 - 2020^3 + 8} =$ $= \sqrt[3]{8} = 2$	3p 2p
b)	$x * e = x$ , pentru orice număr real $x$ , deci $\sqrt[3]{x^3 + e^3 + 8} = x \Leftrightarrow x^3 + e^3 + 8 = x^3 \Leftrightarrow e = -2$ Cum $(-2) * x = \sqrt[3]{(-2)^3 + x^3 + 8} = \sqrt[3]{x^3} = x$ , pentru orice număr real $x$ , obținem că $e = -2$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	3p 2p

<b>c)</b>	$f(x * y) = (x * y)^3 + 8 = \left(\sqrt[3]{x^3 + y^3 + 8}\right)^3 + 8 = x^3 + y^3 + 8 + 8 =$	<b>2p</b>
	$= x^3 + 8 + y^3 + 8 = f(x) + f(y)$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$ , deci $f$ este morfism de la grupul $(\mathbb{R}, *)$ la grupul $(\mathbb{R}, +)$	<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x+2} + \frac{x}{x+4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1+\frac{2}{x}} + \frac{1}{1+\frac{4}{x}} \right) =$	<b>3p</b>
	$= 1 + 1 = 2$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+4)^2}$ , $x \in (-2, +\infty)$	<b>3p</b>
	$f'(x) < 0$ , pentru orice $x \in (-2, +\infty)$ , deci $f$ este descrescătoare pe $(-2, +\infty)$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$f$ este continuă, $f$ este descrescătoare pe $[-1, +\infty)$ , $f(-1) = \frac{4}{3}$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , deci	<b>3p</b>
	$f(x) \in \left(0, \frac{4}{3}\right]$ , pentru orice $x \in [-1, +\infty)$ $f(x) \in \mathbb{Z}$ , deci $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0$ și, cum $x \in [-1, +\infty)$ , obținem $x = -2 + \sqrt{2}$	<b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^2 \frac{x+1}{f(x)} dx = \int_0^2 e^x dx = e^x \Big _0^2 =$	<b>3p</b>
	$= e^2 - e^0 = e^2 - 1$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 e^{3x} f^2(x) dx = \int_0^1 (x+1)^2 e^x dx = (x^2 + 1)e^x \Big _0^1 =$	<b>3p</b>
	$= 2e - e^0 = 2e - 1$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$\frac{f(x)}{x+1} = e^{-x}$ , $x \in (0, +\infty) \Rightarrow 1 - \int_0^a \frac{f(x)}{x+1} dx = e^{-a}$ , $1 - \int_0^b \frac{f(x)}{x+1} dx = e^{-b}$ , $1 - \int_0^c \frac{f(x)}{x+1} dx = e^{-c}$	<b>3p</b>
	$e^{-a}$ , $e^{-b}$ și $e^{-c}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice $\Leftrightarrow (e^{-b})^2 = e^{-a} \cdot e^{-c}$ , deci $e^{-2b} = e^{-a-c}$ , de unde obținem $2b = a + c$ , adică $a$ , $b$ și $c$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	<b>2p</b>