

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} < 2$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 - 4x + 5$. Determinați produsul absciselor punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 3^{x-2} + 3^{x+2} = 91$.
- 5p 4. Determinați termenul care **nu** îl conține pe x din dezvoltarea $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^9$, unde $x \in (0, +\infty)$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(1,3)$ și $C(3,2)$. Determinați ecuația dreptei OG , știind că G este centrul de greutate al triunghiului ABC .
- 5p 6. Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC , știind că $AB = 2$ și $\cos C = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr întreg.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 7$.
- 5p b) Demonstrați că rangul matricei $A(a)$ este egal cu 3, pentru orice număr întreg a .
- 5p c) Determinați numărul întreg m pentru care inversa matricei $A(m)$ are toate elementele numere întregi.
2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{xy}{x+y}$.
- 5p a) Arătați că $2 \circ 2 = 1$.
- 5p b) Demonstrați că $x \circ y \circ z = (x^{-1} + y^{-1} + z^{-1})^{-1}$, pentru orice $x, y, z \in M$.
- 5p c) Demonstrați că $\frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \frac{1}{4} \circ \dots \circ \frac{1}{10} = \frac{1}{54}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = -\frac{2}{x^2-1}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p b) Demonstrați că funcția f este bijectivă.
- 5p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x))$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{6}$.

5p b) Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x} \ln x dx = \frac{e^2 - 7}{4}$.

5p c) Determinați numerele reale a , $a > 1$ pentru care $\int_1^a f(x)e^x dx = e^a - 3e$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9}{1 - \frac{1}{2}} =$ $= 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 \right) < 2$	3p 2p
2.	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$ Cum $\Delta > 0$, produsul absciselor punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox este egal cu -5	2p 3p
3.	$3^{x-2} (3^2 + 1 + 3^4) = 91 \Leftrightarrow 3^{x-2} = 1$ $x = 2$	3p 2p
4.	$T_{k+1} = C_9^k (\sqrt{x})^{9-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_9^k x^{\frac{9-k}{2} + (-k)} = C_9^k x^{\frac{9-3k}{2}}$, unde $k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ $\frac{9-3k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 3$, deci $T_4 = C_9^3 = 84$ nu îl conține pe x	3p 2p
5.	$G\left(\frac{-1+1+3}{3}, \frac{1+3+2}{3}\right)$, deci $G(1, 2)$ este centrul de greutate al triunghiului ABC Ecuația dreptei OG este $y - 0 = \frac{2-0}{1-0}(x-0)$, deci $y = 2x$	3p 2p
6.	$\cos C = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $2R = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow 2R = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, deci raza cercului circumscris triunghiului ABC este $R = \sqrt{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$ $= 2 + 0 + 6 - (-3) - 4 - 0 = 7$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = 11 - 4a$, pentru orice număr întreg a Cum $\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{11}{4} \notin \mathbb{Z}$, obținem $\det(A(a)) \neq 0$, pentru orice număr întreg a , deci rangul matricei $A(a)$ este egal cu 3, pentru orice număr întreg a	2p 3p
c)	Pentru orice număr întreg m , $A(m)$ este inversabilă și $A^{-1}(m)$ are toate elementele numere întregi $\Leftrightarrow \det(A(m)) = -1$ sau $\det(A(m)) = 1$ Cum m este număr întreg, obținem $m = 3$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M_mate-info*

Barem de evaluare și de notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

2.a)	$2 \circ 2 = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} =$ $= \frac{4}{4} = 1$	3p
		2p
b)	$x \circ y \circ z = \left(\frac{xy}{x+y} \right) \circ z = \frac{\frac{xy}{x+y} \cdot z}{\frac{xy}{x+y} + z} = \frac{xyz}{xy + xz + yz} =$ $= \frac{1}{\frac{xy}{xyz} + \frac{xz}{xyz} + \frac{yz}{xyz}} = \frac{1}{z^{-1} + y^{-1} + x^{-1}} = (x^{-1} + y^{-1} + z^{-1})^{-1}, \text{ pentru orice } x, y, z \in M$	3p
		2p
c)	$\frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \frac{1}{4} \circ \dots \circ \frac{1}{10} = \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{3} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{4} \right)^{-1} + \dots + \left(\frac{1}{10} \right)^{-1} \right)^{-1} = (2 + 3 + 4 + \dots + 10)^{-1} =$ $= \left(\frac{10 \cdot 11}{2} - 1 \right)^{-1} = 54^{-1} = \frac{1}{54}$	3p
		2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} =$ $= \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{2}{x^2-1}, x \in (1, +\infty)$	3p
		2p
b)	<p>$f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1, +\infty)$, deci f este injectivă</p> <p>f este continuă pe $(1, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow f$ este surjectivă, deci f este bijectivă</p>	2p
		3p
c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \frac{x+1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[\left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{2}} \right]^{\frac{2x}{x-1}} = \ln e^2 = 2$	3p
		2p
2.a)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{5}{6}$	3p
		2p
b)	$\int_1^e \frac{f(x)}{x} \ln x dx = \int_1^e (x-3) \ln x dx + \int_1^e \frac{2}{x} \ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} - 3x \right) \ln x \Big _1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 3 \right) dx + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln^2 x \Big _1^e =$ $= \frac{e^2}{2} - 3e - \left(\frac{x^2}{4} - 3x \right) \Big _1^e + \ln^2 e - \ln^2 1 = \frac{e^2}{2} - 3e - \left(\frac{e^2}{4} - 3e - \frac{1}{4} + 3 \right) + 1 = \frac{e^2 - 7}{4}$	2p
		3p
c)	$\int_1^a f(x) e^x dx = (x^2 - 3x + 2) e^x \Big _1^a - \int_1^a (2x - 3) e^x dx = (x^2 - 5x + 7) e^x \Big _1^a = (a^2 - 5a + 7) e^a - 3e$ <p>$(a^2 - 5a + 7) e^a - 3e = e^a - 3e \Leftrightarrow a^2 - 5a + 6 = 0$, deci $a = 2$ sau $a = 3$, care convin</p>	3p
		2p