

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{tehnologic}}$

Testul 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $\frac{2}{3} \cdot 0,3 + 3,2 : 4 = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6 - 4x$. Determinați numărul real a , știind că punctul $A(a, 2a)$ aparține graficului funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 2x + 16} = 4$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, acesta să verifice inegalitatea $(n - 2)(n - 6) \geq 0$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-5, 0)$, $B(-1, 8)$. Arătați că triunghiul OAM este isoscel, știind că M este mijlocul segmentului AB .
- 5p** 6. Se consideră pătratul $ABCD$ astfel încât aria triunghiului ABC este egală cu 2. Calculați perimetrul pătratului $ABCD$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x & 2 \\ -7 & x - 4 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 0$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $\det(B(x)) + \det(B(7) - A) = 0$.
- 5p** c) Determinați matricea $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $xA - A \cdot B(x) = 14C$, pentru orice număr real x .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 6xy - 6x - 6y + 7$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 3 = 1$.
- 5p** b) Demonstrați că $e = \frac{7}{6}$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** c) Determinați suma numerelor întregi m care verifică inegalitatea $\frac{m}{2} * \left(-\frac{m}{3}\right) \geq 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \frac{3}{x} + 4$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{3(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p** c) Arătați că funcția f este convexă.
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 (x + 1)f(x) dx = 4$.
- 5p** b) Calculați $\int_1^3 \frac{f(x)}{x} dx$.
- 5p** c) Arătați că $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \cdot f(-x) dx = 4(1 - \ln 3)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\frac{2}{3} \cdot 0,3 + 3,2 : 4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} + \frac{32}{10} \cdot \frac{1}{4} =$ $= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$	3p 2p
2.	$f(a) = 2a \Leftrightarrow 6 - 4a = 2a$ $a = 1$	3p 2p
3.	$x^2 - 2x + 16 = 16 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$ $x = 0$ sau $x = 2$, care convin	2p 3p
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile Numerele n din mulțimea A pentru care $(n-2)(n-6) \geq 0$ sunt 1, 2, 6, 7, 8 și 9, deci sunt 6 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$	2p 2p 1p
5.	$M(-3, 4)$ $OA = 5$, $OM = 5$, deci triunghiul OAM este isoscel	2p 3p
6.	Triunghiul ABC este dreptunghic în B , deci $\frac{AB \cdot BC}{2} = 2$, și, cum $AB = BC$, obținem $AB = 2$ $P_{ABCD} = 4AB = 8$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 - 2 \cdot (-6) =$ $= -12 + 12 = 0$	3p 2p
b)	$\det(B(x)) = x^2 - 4x + 14$, pentru orice număr real x Cum $\det(B(7) - A) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -10$, obținem $x^2 - 4x + 4 = 0$, deci $x = 2$	2p 3p
c)	$xA = \begin{pmatrix} -3x & 2x \\ -6x & 4x \end{pmatrix}$, $A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} -3x-14 & 2x-14 \\ -6x-28 & 4x-28 \end{pmatrix} \Rightarrow xA - A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} 14 & 14 \\ 28 & 28 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} 14 & 14 \\ 28 & 28 \end{pmatrix} = 14C$, de unde obținem $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	3p 2p
2.a)	$1 \cdot 3 = 6 \cdot 1 \cdot 3 - 6 \cdot 1 - 6 \cdot 3 + 7 =$ $= 18 - 6 - 18 + 7 = 1$	3p 2p

b)	$x * \frac{7}{6} = 6x \cdot \frac{7}{6} - 6x - 6 \cdot \frac{7}{6} + 7 = 7x - 6x - 7 + 7 = x$, pentru orice număr real x	2p
	$\frac{7}{6} * x = 6 \cdot \frac{7}{6} \cdot x - 6 \cdot \frac{7}{6} - 6x + 7 = 7x - 7 - 6x + 7 = x$, pentru orice număr real x , deci $e = \frac{7}{6}$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	3p
c)	$\frac{m}{2} * \left(-\frac{m}{3}\right) = -m^2 - m + 7$, pentru orice număr întreg m	2p
	$-m^2 - m + 7 \geq 1 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 \leq 0$, de unde obținem $m \in [-3, 2]$, deci suma numerelor întregi care verifică inegalitatea este egală cu $-3 + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = -3$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} + 0 =$	3p
	$= \frac{3(x^4 - 1)}{x^2} = \frac{3(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2}, x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$	2p
	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (0, 1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0, 1]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $x \in [1, +\infty)$	3p
c)	$f''(x) = 6x + \frac{6}{x^3}, x \in (0, +\infty)$	2p
	$f''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția f este convexă	3p
2.a)	$\int_0^2 (x+1)f(x)dx = \int_0^2 2xdx = x^2 \Big _0^2 =$	3p
	$= 4 - 0 = 4$	2p
b)	$\int_1^3 \frac{2}{x+1} dx = 2 \int_1^3 \frac{(x+1)'}{x+1} dx = 2 \ln(x+1) \Big _1^3 =$	3p
	$= 2 \ln 4 - 2 \ln 2 = 2 \ln 2$	2p
c)	$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \cdot f(-x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{4x^2}{x^2 - 1} dx = 4 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 1 + 1}{x^2 - 1} dx = 4 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{x^2 - 1}\right) dx = 4 \left(x + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}\right) \Big _{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$	3p
	$= 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 3\right) = 4(1 - \ln 3)$	2p