Examenul de bacalaureat național 2021
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_2 = 2$ și $b_3 = 4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 3$. Determinați produsul absciselor punctelor în care graficul funcției f intersectează axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{x+2} = 1 - x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(-1,0)$ și $C(a,a+2)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{AB}$ sunt coliniari.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0)) = -2$.

5p **b)** Arătați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstrați că, dacă a și b sunt numere întregi și $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A(a)\cdot X = A(b)$, atunci elementele matricei X sunt numere întregi.

2. Pe mulțimea $A = (0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x}$.

5p **a)** Arătați că numărul $a = 2 \circ 4$ este întreg.

5p **b)** Arătați că $x \circ y \geq 4$, pentru orice $x, y \in A$.

5p **c)** Arătați că legea de compoziție „$\circ$” **nu** admite element neutru.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$, $x \in (-1,1)\cup(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul în care graficul intersectează axa Oy.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)}$.

2. Se consideră funcția $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 (x+4) f(x)\,dx = 6$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătaţi că $\int_0^n f(x)e^{-x}\,dx < 1$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=2$, unde q este rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$	**2p**
	$b_1=1$, deci $b_1+b_2+b_3=7$	**3p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-5x+3=0$	**2p**
	Cum $\Delta>0$, graficul funcţiei f intersectează axa Ox în două puncte distincte pentru care produsul absciselor este egal cu $x_1x_2=\frac{3}{1}=3$	**3p**
3.	$4(x+2)=(1-x)^2 \Rightarrow x^2-6x-7=0$	**3p**
	$x=-1$, care convine; $x=7$, care nu convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Cifra sutelor poate fi aleasă în 4 moduri, iar pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifrele zecilor şi unităţilor se pot alege în câte 5 moduri, deci există $4\cdot5\cdot5=100$ de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{100}{900}=\frac{1}{9}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{OC}=a\vec{i}+(a+2)\vec{j}$, $\overrightarrow{AB}=-2\vec{i}-3\vec{j}$	**2p**
	$\frac{a}{-2}=\frac{a+2}{-3}\Leftrightarrow a=4$	**3p**
6.	$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}+\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}=$	**3p**
	$=2\sin x\cos\frac{\pi}{3}=2\sin x\cdot\frac{1}{2}=\sin x$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix}\Rightarrow \det A(0)=\begin{vmatrix}0&1\\2&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0\cdot3-1\cdot2=-2$	**3p**
b)	$\det A(a)=\begin{vmatrix}a&a+1\\a+2&a+3\end{vmatrix}=a^2+3a-a^2-3a-2=-2$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\det A(a)\ne0\Rightarrow A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$(A(a))^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{a+3}{2}&\frac{a+1}{2}\\\frac{a+2}{2}&-\frac{a}{2}\end{pmatrix}$, pentru orice număr întreg a	**2p**
	$X=(A(a))^{-1}A(b)=\begin{pmatrix}a-b+1&a-b\\b-a&b-a+1\end{pmatrix}$ şi, cum a şi b sunt numere întregi, obținem că X are toate elementele numere întregi	**3p**

2.a)	$a = 2 \circ 4 = \frac{2 \cdot 2}{4} + \frac{2 \cdot 4}{2} =$	**2p**
	$= 1 + 4 = 5$, care este număr întreg	**3p**
b)	$x \circ y = \frac{2x^2 + 2y^2}{xy}$, pentru orice $x, y \in A$	**2p**
	$x \circ y - 4 = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4xy}{xy} = \frac{2(x-y)^2}{xy} \geq 0$, deci $x \circ y \geq 4$, pentru orice $x, y \in A$	**3p**
c)	Dacă legea de compoziţie „$\circ$” ar admite element neutru, atunci ar exista $e \in A$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, pentru orice $x \in A \Rightarrow e \circ e = e$, de unde obţinem $e = \frac{2e}{e} + \frac{2e}{e}$, deci $e = 4$	**3p**
	Cum $2 \circ 4 \neq 2$, obținem că $e = 4$ nu convine, deci legea de compoziţie „$\circ$” nu admite element neutru	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} =$	**2p**
	$= \frac{-x^2 - 2x - 1 + x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$, $x \in (-1,1) \cup (1, +\infty)$	**3p**
b)	Graficul funcției f intersectează axa Oy în punctul $A(0, f(0))$, $f(0) = -2$ și $f'(0) = 0$	**3p**
	Ecuaţia tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = -2$	**2p**
c)	$\frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{x(x+2)}{(x-1)(x+1)}$, $x \in (-1,1) \cup (1, +\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 1$	**3p**
2.a)	$\int_0^2 (x+4) f(x) dx = \int_0^2 (x+2) dx = \frac{x^2}{2} \Big\vert_0^2 + 2x \Big\vert_0^2 =$	**3p**
	$= 2 - 0 + 4 - 0 = 6$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+4}\right) dx = \left(x - 2\ln(x+4)\right) \Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= 1 - 2\ln 5 + 2\ln 4 = 1 - 2\ln\frac{5}{4}$	**2p**
c)	$\frac{x+2}{x+4} \leq 1$ şi $e^{-x} > 0$, deci $f(x)e^{-x} \leq e^{-x}$, pentru orice $x \in [0, n]$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$\int_0^n f(x)e^{-x} dx \leq \int_0^n e^{-x} dx = -e^{-x} \Big\vert_0^n = 1 - e^{-n} < 1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**