

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

Test 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $1,75 : 0,25 - 2\left(\frac{17}{4} - 2,25\right) = 3$.
- 5p 2. Determinați imaginea funcției $f : [1,5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x + 4) = 4$.
- 5p 4. După o ieftinire cu 20%, prețul unui produs este de 144 lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, a)$ și $B(5, 0)$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a , știind că segmentul AB are lungimea egală cu 5.
- 5p 6. Arătați că $\sin^2 130^\circ + \cos^2 50^\circ = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = 0$.
- 5p b) Arătați că $A \cdot A + A = O_2$.
- 5p c) Demonstrați că există o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det X = \det(X + I_2)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = -xy + x + y$.
- 5p a) Arătați că $1 \circ \sqrt{2} = 1$.
- 5p b) Demonstrați că $x \circ y = -(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numărul real x pentru care $3^x \circ 5^x = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2 - 63$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 4x(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x^2 - 9}$.
2. Se consideră funcțiile $F : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^2}{x+1}$ și $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$.
- 5p a) Demonstrați că funcția F este o primitivă a funcției f .
- 5p b) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p c) Determinați numărul real a , $a > 1$, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)}{F(x)} dx = \ln \frac{8}{3}$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$1,75 : 0,25 - 2\left(\frac{17}{4} - 2,25\right) = 175 : 25 - 2(4,25 - 2,25) =$ $= 7 - 2 \cdot 2 = 3$	3p 2p
2.	Pentru orice $x \in [1,5]$, $f(x) = y \Leftrightarrow 2x + 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$ $y \in \text{Im } f \Leftrightarrow$ există $x \in [1,5]$ astfel încât $f(x) = y \Leftrightarrow 1 \leq \frac{y-1}{2} \leq 5 \Leftrightarrow 3 \leq y \leq 11$, deci $\text{Im } f = [3,11]$	2p 3p
3.	$2x + 4 = 2^4$ $x = 6$, care convine	3p 2p
4.	$x - \frac{20}{100} \cdot x = 144$, unde x este prețul produsului înainte de ieftinire $x = 180$ de lei	3p 2p
5.	$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (0-a)^2}$, deci $\sqrt{a^2 + 9} = 5$ $a = -4$ sau $a = 4$	3p 2p
6.	$\sin 130^\circ = \sin(180^\circ - 130^\circ) = \sin 50^\circ$ $\sin^2 130^\circ + \cos^2 50^\circ = \sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ = 1$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 6 \cdot (-2) =$ $= -12 + 12 = 0$	3p 2p
b)	$A \cdot A + A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$	3p 2p
c)	$X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, unde x, y, z și t sunt numere reale și $X + I_2 = \begin{pmatrix} x+1 & y \\ z & t+1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y \\ z & t+1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow xt - yz = xt + x + t + 1 - yz \Leftrightarrow x + t = -1$ și, cum există o infinitate de numere reale x și t pentru care $x + t = -1$, există o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det X = \det(X + I_2)$	2p 3p
2.a)	$1 \circ \sqrt{2} = -1 \cdot \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} =$ $= -\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 1$	3p 2p

b)	$x \circ y = -xy + x + y - 1 + 1 =$ $= -x(y-1) + (y-1) + 1 = -(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
c)	$-(3^x - 1)(5^x - 1) + 1 = 1 \Leftrightarrow 3^x - 1 = 0$ sau $5^x - 1 = 0$ $x = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 4x^3 - 4x =$ $= 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$f(2) = -55$, $f'(2) = 24$ Ecuția tangentei este $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, deci $y = 24x - 103$	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{2x} =$ $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x(x-1)(x+1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 3} 2(x-1)(x+1) = 16$	3p 2p
2.a)	$F'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} =$ $= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - 1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = f(x)$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$, deci funcția F este o primitivă a funcției f	2p 3p
b)	$\int_0^1 f(x) dx = F(x) \Big _0^1 = F(1) - F(0) =$ $= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$	3p 2p
c)	$F(x) > 0$, pentru orice $x \in [1, a]$ și $\int_1^a \frac{f(x)}{F(x)} dx = \int_1^a \frac{F'(x)}{F(x)} dx = \ln(F(x)) \Big _1^a = \ln(F(a)) - \ln(F(1))$ $\ln(F(a)) - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{8}{3} \Leftrightarrow \ln(F(a)) = \ln \frac{8}{3} + \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(F(a)) = \ln \frac{4}{3}$, deci $\frac{a^2}{a+1} = \frac{4}{3}$ și, cum $a > 1$, obținem $a = 2$	3p 2p