

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $(\log_2 63 - \log_2 7) \cdot \frac{1}{\log_2 3} = 2$.
- 5p 2. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuația $x^2 + mx - m = 0$ nu are soluții reale.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-20} = \frac{1}{81}$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n! \leq n(n-1)$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(0,4)$ și $O(0,0)$. Determinați coordonatele punctului C , știind că $\overline{AB} = \overline{OC}$.
- 5p 6. Determinați numărul real a , $a > 1$, știind că $a-1$, $2a$ și $2a+1$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in (0, +\infty)$.
- 5p a) Arătați că $\det(A(e)) = e$.
- 5p b) Demonstrați că $\det(A(a^2)) = \det(A(a) \cdot A(a))$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$.
- 5p c) Determinați numerele $a, b \in (0, +\infty)$ pentru care $A(a) + A(b) = 2A(a) \cdot A(b)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy - 3\sqrt{2}(x+y) + 6 + \sqrt{2}$.
- 5p a) Arătați că $\sqrt{2} \circ 1 = \sqrt{2}$.
- 5p b) Demonstrați că $x \circ y = 3(x - \sqrt{2})(y - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Calculați $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}} \circ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \circ \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2^x + 3^x - 4, & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{x^2 - x + 1}{x^2}, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$.
- 5p a) Arătați că funcția f este continuă pe \mathbb{R} .
- 5p b) Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $(-\infty, 1)$.
- 5p c) Demonstrați că $f(x) \leq 1$, pentru orice număr real x .
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x+3}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 (x+1)(x+3)f(x)dx = 5$.

5p b) Calculați $\int_0^2 f(x)dx$.

5p c) Demonstrați că orice primitivă $F: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f este concavă.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(\log_2 63 - \log_2 7) \cdot \frac{1}{\log_2 3} = \log_2 \frac{63}{7} \cdot \frac{1}{\log_2 3} =$	2p
	$= \log_2 3^2 \cdot \frac{1}{\log_2 3} = 2 \log_2 3 \cdot \frac{1}{\log_2 3} = 2$	3p
2.	$\Delta = m^2 + 4m$, deci ecuația nu are soluții reale $\Leftrightarrow m^2 + 4m < 0$	3p
	$m \in (-4, 0)$	2p
3.	$3^{x^2-20} = 3^{-4} \Leftrightarrow x^2 = 16$	3p
	$x = -4$ sau $x = 4$	2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	2p
	$n! \leq n(n-1) \Rightarrow n = 2$ sau $n = 3$, deci sunt 2 cazuri favorabile	2p
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	1p
5.	$\vec{AB} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{OC} = a\vec{i} + b\vec{j}$, unde $C(a, b)$, deci $a\vec{i} + b\vec{j} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$	3p
	$a = 4$, $b = 4$	2p
6.	Cum triunghiul este dreptunghic, $2a+1 > a-1$ și $2a+1 > 2a \Rightarrow (2a+1)^2 = (2a)^2 + (a-1)^2$, deci	2p
	$a^2 - 6a = 0$	
	Cum a este număr real, $a > 1$, obținem $a = 6$	3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(e)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$	2p
	$= e + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = e$	3p
b)	$A(a) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\ln a \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(a) \cdot A(a)) = a^2$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$	3p
	$\det(A(a^2)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ln a^2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 = \det(A(a) \cdot A(a))$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$	2p

c)	$A(a)+A(b)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & \ln(ab) \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln(ab) \\ 0 & ab & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pentru orice } a,b\in(0,+\infty)$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & \ln(ab) \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2\ln(ab) \\ 0 & 2ab & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow ab=1 \text{ și } a+b=2, \text{ de unde obținem } a=1 \text{ și } b=1$	3p 2p
2.a)	$\sqrt{2}\circ 1=3\cdot\sqrt{2}\cdot 1-3\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+6+\sqrt{2}=$ $=3\sqrt{2}-6-3\sqrt{2}+6+\sqrt{2}=\sqrt{2}$	2p 3p
b)	$x\circ y=3xy-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+6+\sqrt{2}=$ $=3x(y-\sqrt{2})-3\sqrt{2}(y-\sqrt{2})+\sqrt{2}=3(x-\sqrt{2})(y-\sqrt{2})+\sqrt{2}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	2p 3p
c)	$x\circ\sqrt{2}=\sqrt{2}, \sqrt{2}\circ y=\sqrt{2}, \text{ unde } x \text{ și } y \text{ sunt numere reale}$ $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}\circ\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\circ\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\circ\dots\circ\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}=\left(\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}\circ\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)\circ\sqrt{2}\right)\circ\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}\circ\dots\circ\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}=\sqrt{2}\circ\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}\circ\dots\circ\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}\right)=\sqrt{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\lim_{\substack{x\rightarrow 1 \\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\rightarrow 1 \\ x<1}} (2^x+3^x-4)=1, \quad \lim_{\substack{x\rightarrow 1 \\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\rightarrow 1 \\ x>1}} \frac{x^2-x+1}{x^2}=1 \quad \text{și} \quad f(1)=1, \quad \text{deci}$ $\lim_{x\rightarrow 1} f(x)=f(1), \text{ de unde obținem că } f \text{ este continuă în } x=1$ <p>Cum f este continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,+\infty)$, obținem că f este continuă pe \mathbb{R}</p>	3p 2p
b)	$x\in(-\infty,1)\Rightarrow f(x)=2^x+3^x-4, \text{ deci } f'(x)=2^x\ln 2+3^x\ln 3$ $f'(x)>0, \text{ pentru orice } x\in(-\infty,1), \text{ deci funcția } f \text{ este crescătoare pe } (-\infty,1)$	3p 2p
c)	$f \text{ este crescătoare pe } (-\infty,1) \text{ și continuă în } x=1, \text{ deci } f(x)\leq f(1) \text{ și, cum } f(1)=1, \text{ obținem } f(x)\leq 1, \text{ pentru orice } x\in(-\infty,1)$ $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f'(x)=\frac{x-2}{x^3}, \text{ deci } f'(x)<0, \text{ pentru orice } x\in(1,2) \text{ și } f'(x)>0, \text{ pentru}$ $\text{orice } x\in(2,+\infty) \text{ și, cum } f \text{ este continuă, } f(1)=1 \text{ și } \lim_{x\rightarrow+\infty} f(x)=1, \text{ obținem } f(x)\leq 1,$ $\text{pentru orice } x\in[1,+\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 (x+1)(x+3)f(x)dx=\int_0^1 (2x+4)dx=\left(x^2+4x\right)\Big _0^1=$ $=1+4-0=5$	3p 2p
b)	$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 \frac{2x+4}{x^2+4x+3}dx=\ln(x^2+4x+3)\Big _0^2=$ $=\ln 15-\ln 3=\ln 5$	2p 3p
c)	$F'(x)=f(x), x\in(-1,+\infty), \text{ deci } F''(x)=\frac{-2(x^2+4x+5)}{(x^2+4x+3)^2}, x\in(-1,+\infty)$ $F''(x)<0, \text{ pentru orice } x\in(-1,+\infty), \text{ deci orice primitivă } F \text{ a funcției } f \text{ este concavă}$	3p 2p