

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați suma elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq \sqrt{5}\}$.
- 5p 2. Determinați numerele reale m și n , știind că $f(1) = 2$ și $f(2) = 1$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x + 2 \cdot 4^x - 8 = 0$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor un număr prim.
- 5p 5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctul O , intersecția diagonalelor acestuia. Arătați că $\overline{OB} + \overline{OC} = \overline{AB}$.
- 5p 6. Determinați $\sin x$, știind că $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ și $\cos x = \frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ a-3 & a & 1 \\ 3 & 2a-1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + ay + z = 1 \\ (a-3)x + ay + z = 2a-1, \\ 3x + (2a-1)y + z = 1 \end{cases}$

unde a este număr real.

- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 5$.
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații este compatibil determinat.
- 5p c) Determinați numărul real a , știind că sistemul de ecuații are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și x_0, y_0 și z_0 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x * y = x + y - \frac{xy}{3}$.
- 5p a) Arătați că $1 * 3 = 3$.
- 5p b) Determinați numărul real x pentru care $x * x * x = \frac{26}{9}$.
- 5p c) Determinați numerele naturale n ale căror simetrice în raport cu legea de compoziție „*” sunt numere naturale.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4 \ln x$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{4(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

5p b) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficului funcției f .

5p c) Demonstrați că, pentru fiecare număr natural n , $n \geq 2$, ecuația $f(x) - n = 0$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 e^x$.

5p a) Arătați că $\int_0^2 f(x) e^{-x} dx = 4$.

5p b) Calculați $\int_1^e \frac{1}{x^2} f(\ln x) dx$.

5p c) Arătați că $\int_0^1 f(x)F(x)dx = 2(e-3)^2$, unde $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este primitiva funcției f pentru care $F(0) = 0$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$A = \{0, 1, 2\}$ Suma elementelor mulțimii A este egală cu $0 + 1 + 2 = 3$	3p 2p
2.	$f(1) = m + n$ și $f(2) = 2m + n$, deci $m + n = 2$ și $2m + n = 1$ $m = -1$, $n = 3$	2p 3p
3.	$(4^x + 4)(4^x - 2) = 0$ $2^{2x} = 2$, deci $x = \frac{1}{2}$	2p 3p
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile Mulțimea numerelor naturale de trei cifre care au cifra sutelor un număr prim are $4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$ de elemente, deci sunt 400 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{400}{900} = \frac{4}{9}$	2p 2p 1p
5.	O este punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului $ABCD \Rightarrow \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$	3p 2p
6.	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$ Cum $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, obținem $\sin x = -\frac{3}{5}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 3 + 0 - 0 - (-2) + 0 = 5$	3p 2p
b)	$\det(A(a)) = a^2 - 6a + 5$, pentru orice număr real a Sistemul de ecuații este compatibil determinat $\Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0$, deci $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$	2p 3p
c)	Sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) , deci $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$ și soluția sistemului este $\left(\frac{2(a-1)}{a-5}, -\frac{2}{a-5}, -\frac{a+1}{a-5}\right)$ $2 \cdot \left(-\frac{2}{a-5}\right) = \frac{2(a-1)}{a-5} + \left(-\frac{a+1}{a-5}\right)$, deci $a = -1$, care convine	3p 2p

2.a)	$1*3 = 1+3 - \frac{1 \cdot 3}{3} =$ $= 1+3-1=3$	3p 2p
b)	$x*x = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 3, x*x*x = \frac{1}{3^2}(x-3)^3 + 3$, pentru orice număr real x $\frac{1}{9}(x-3)^3 + 3 = \frac{26}{9} \Leftrightarrow (x-3)^3 = -1 \Leftrightarrow x-3 = -1$, de unde obținem $x = 2$	2p 3p
c)	$x*0 = 0*x = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*” $n*n' = 0 \Leftrightarrow n'(n-3) = 3n$, deci $n' = \frac{3n}{n-3}$, pentru orice număr natural $n, n \neq 3$ Cum n și n' sunt numere naturale, obținem $n = 0, n = 4, n = 6$ sau $n = 12$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 4x^3 - \frac{4}{x} =$ $= \frac{4(x^4 - 1)}{x} = \frac{4(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x} = \frac{4(x-1)(x+1)(x^2 + 1)}{x}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^4 - 4 \ln x) = +\infty$ Dreapta de ecuație $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, 1) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0, 1)$ și $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1, +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty, f(1) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și f este continuă pe $(0, +\infty)$, deci pentru fiecare număr natural $n, n \geq 2$, ecuația $f(x) - n = 0$ are două soluții reale distincte, $x_1 \in (0, 1)$ și $x_2 \in (1, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^2 f(x)e^{-x} dx = \int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big _0^2 =$ $= 4 - 0 = 4$	3p 2p
b)	$\int_1^e \frac{1}{x^2} f(\ln x) dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln^3 x dx = \frac{\ln^4 x}{4} \Big _1^e =$ $= \frac{\ln^4 e}{4} - \frac{\ln^4 1}{4} = \frac{1}{4}$	3p 2p
c)	$F(x) = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + c, c \in \mathbb{R}$ și, cum $F(0) = 0 \Rightarrow F(x) = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + 6$ $\int_0^1 f(x)F(x) dx = \int_0^1 F'(x)F(x) dx = \frac{1}{2} F^2(x) \Big _0^1 = \frac{1}{2} (F^2(1) - F^2(0)) = 2(e-3)^2$	2p 3p