

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Testul 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că media aritmetică a numerelor $a = 2,4$ și $b = 4 - \frac{2}{5}$ este egală cu 3.
- 5p** 2. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x$ cu axa Ox .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{1-2x} = 32$.
- 5p** 4. În urma unei ieftiniri cu 20%, prețul unui produs a scăzut cu 27 de lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(6,4)$ și $C(0,-4)$. Știind că punctul D este mijlocul segmentului AB , arătați că $BC = 2OD$.
- 5p** 6. Se consideră numărul real $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x = \frac{1}{5}$. Arătați că $\operatorname{tg} x = 2\sqrt{6}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x-1 & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(4)) = -7$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $\det(A(1) \cdot A(1) + 2A(x)) = 11$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x și y pentru care $A(0) \cdot A(x) \cdot A(1) = 3A(y)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 20x - 21y + 1$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 2 = -21$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $(x-1) * x = 1$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $x^2 * x \leq 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)e^x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = (x-1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{e^x - e}$.
- 5p** c) Arătați că $(2-x)e^{x-1} \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^5 + x^2 - 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - x^2) dx = -2$.
- 5p** b) Arătați că $\int_2^4 \frac{f(x) - 2x^5}{2x} dx = \frac{6 - \ln 2}{2}$.
- 5p** c) Calculați $\int_0^1 x^4 (f(x) - x^2)^2 dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică M_tehnologic
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b = 3,6$ $m_a = \frac{2,4 + 3,6}{2} = \frac{6}{2} = 3$	2p 3p
2.	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0$ Abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox sunt $x = -3$ și $x = 0$	2p 3p
3.	$2^{1-2x} = 2^5 \Leftrightarrow 1 - 2x = 5$ $x = -2$	3p 2p
4.	$\frac{20}{100} \cdot x = 27$, unde x este prețul înainte de ieftinire $x = 135$ de lei	3p 2p
5.	$O(0,0)$ este mijlocul segmentului AC OD este linie mijlocie în triunghiul ABC , deci $OD = \frac{BC}{2}$, de unde obținem $BC = 2OD$	2p 3p
6.	$\sin^2 x + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{24}{25}$ și, cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ $\operatorname{tg} x = \frac{2\sqrt{6}}{5} : \frac{1}{5} = 2\sqrt{6}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(4) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(4)) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 =$ $= -3 - 4 = -7$	3p 2p
b)	$A(1) \cdot A(1) + 2A(x) = \begin{pmatrix} 2x-1 & -1+2x \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1) \cdot A(1) + 2A(x)) = 1 - 2x$, pentru orice număr real x $1 - 2x = 11$, de unde obținem $x = -5$	3p 2p
c)	$A(0) \cdot A(x) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} -x & 1 \\ x+1 & -3 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} -x & 1 \\ x+1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y-3 & 3y \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = 2$ și $y = \frac{1}{3}$	2p 3p
2.a)	$1 \cdot 2 = 20 \cdot 1 - 21 \cdot 2 + 1 =$ $= 20 - 42 + 1 = -21$	3p 2p
b)	$(x-1) \cdot x = -x - 19$, pentru orice număr real x $-x - 19 = 1$, de unde obținem $x = -20$	2p 3p

c)	$x^2 * x = 20x^2 - 21x + 1$, pentru orice număr real x	2p
	$20x^2 - 21x + 1 \leq 0$, de unde obținem $x \in \left[\frac{1}{20}, 1 \right]$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x + (x-2)e^x =$ $= (1+x-2)e^x = (x-1)e^x, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{e^x - e} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)e^x}{e^x - e} =$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xe^x}{e^x} = 1$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ și $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 1]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $x \in [1, +\infty)$ $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow (x-2)e^x \geq -e$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde obținem $(x-2)e^{x-1} \geq -1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $(2-x)e^{x-1} \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	2p 3p
2.a)	$\int_{-1}^1 (f(x) - x^2) dx = \int_{-1}^1 (2x^5 - 1) dx = \left(\frac{x^6}{3} - x \right) \Big _{-1}^1 =$ $= -\frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -2$	3p 2p
b)	$\int_2^4 \frac{f(x) - 2x^5}{2x} dx = \int_2^4 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x \right) \Big _2^4 =$ $= 4 - \frac{1}{2} \ln 4 - 1 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{6 - \ln 2}{2}$	3p 2p
c)	$\int_0^1 x^4 (2x^5 - 1)^2 dx = \frac{1}{10} \int_0^1 (2x^5 - 1)' (2x^5 - 1)^2 dx = \frac{1}{10} \cdot \frac{(2x^5 - 1)^3}{3} \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{10} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{15}$	3p 2p