

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică M\_șt-nat**

**Testul 7**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați termenul  $a_{2021}$  al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1 = 2$  și  $a_3 = 8$ .
- 5p** 2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 3$  cu dreapta  $d$  de ecuație  $y = -x + 3$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{3^{x+2}} = 27$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , acesta să fie divizor al numărului 48.
- 5p** 5. Se consideră vectorii  $\vec{u} = 2\vec{i} + m\vec{j}$  și  $\vec{v} = (m-4)\vec{i} + 2\vec{j}$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 6$ ,  $AC = 3$  și unghiul  $A$  de  $120^\circ$ . Calculați perimetrul triunghiului  $ABC$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} 2ax + y + z = 0 \\ x + 2ay + z = 1 \\ x + ay - z = -1 \end{cases}$ , unde  $a$  este

număr real.

- 5p** a) Arătați că  $\det(A(-1)) = -3$ .
- 5p** b) Determinați valorile reale ale lui  $a$  pentru care sistemul de ecuații admite soluție unică.
- 5p** c) Determinați numărul întreg  $a$ , știind că există numerele reale  $y_0$  și  $z_0$  astfel încât  $(1, y_0, z_0)$  este soluție a sistemului de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x \circ y = x + 5xy + y$ .
- 5p** a) Verificați dacă  $e = 0$  este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p** b) Demonstrați că  $x \circ y = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(y + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5}$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p** c) Calculați partea întreagă a numărului  $q = \left(-\frac{1}{2}\right) \circ \left(-\frac{1}{3}\right) \circ \dots \circ \left(-\frac{1}{2021}\right)$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x+1)\ln x$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln x$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(1, 0)$ .
- 5p** c) Demonstrați că funcția  $f$  este convexă pe  $[1, +\infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^n + 1}{x^2 + 1}$ , unde  $n$  este număr natural nenul.
- 5p** a) Pentru  $n = 3$ , se consideră funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (x^2 + 1)f(x)$ . Determinați primitiva  $G$  a funcției  $g$  pentru care  $G(0) = 2021$ .

**5p** b) Pentru  $n=1$ , calculați  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**5p** c) Demonstrați că  $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 1$ , pentru orice număr natural  $n$ ,  $n \geq 2$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică *M\_șt-nat***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Testul 7

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow r = 3$ $a_{2021} = a_1 + 2020r = 6062$	2p 3p
2.	$f(x) = y \Leftrightarrow 2x - 3 = -x + 3$ Coordonatele punctului de intersecție sunt $x = 2$ și $y = 1$	3p 2p
3.	$\frac{x+2}{3^2} = 3^3 \Leftrightarrow \frac{x+2}{2} = 3$ $x = 4$	3p 2p
4.	Mulțimea $A$ are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile Numerele din mulțimea $A$ care sunt divizori ai numărului 48 sunt: 1, 2, 3, 4, 6 și 8, deci sunt 6 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$	2p 2p 1p
5.	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(m-4) + 2m = 4m - 8$ , unde $m$ este număr real $4m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 2$	3p 2p
6.	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 36 + 9 + 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 63$ , deci $BC = 3\sqrt{7}$ $P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 3\sqrt{7} + 9 = 3(\sqrt{7} + 3)$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(-1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-1)) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$ $= -4 + 1 + (-1) - (-2) - (-1) - 2 = -3$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = -6a^2 - a + 2$ , pentru orice număr real $a$ Sistemul de ecuații admite soluție unică $\Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right\}$	2p 3p
c)	Cum $a$ este număr întreg, obținem că $\det(A(a)) \neq 0$ , deci $(1, y_0, z_0)$ este unica soluție a sistemului de ecuații $1 = \frac{3a}{-6a^2 - a + 2} \Leftrightarrow 3a^2 + 2a - 1 = 0$ și, cum $a$ este număr întreg, obținem $a = -1$	2p 3p
2.a)	$x \circ 0 = x + 5 \cdot x \cdot 0 + 0 = x$ , pentru orice număr real $x$ $0 \circ x = 0 + 5 \cdot 0 \cdot x + x = x$ , pentru orice număr real $x$ , deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”	2p 3p

<b>b)</b>	$x \circ y = 5xy + x + y + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 5x\left(y + \frac{1}{5}\right) + \left(y + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5} =$	<b>3p</b>
	$= \left(y + \frac{1}{5}\right)(5x + 1) - \frac{1}{5} = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(y + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5}$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$x \circ \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{5}$ și $\left(-\frac{1}{5}\right) \circ y = -\frac{1}{5}$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	<b>2p</b>
	$q = \left(\left(-\frac{1}{2}\right) \circ \left(-\frac{1}{3}\right) \circ \left(-\frac{1}{4}\right)\right) \circ \left(-\frac{1}{5}\right) \circ \left(-\frac{1}{6}\right) \circ \dots \circ \left(-\frac{1}{2021}\right) = \left(-\frac{1}{5}\right) \circ \left(\left(-\frac{1}{6}\right) \circ \dots \circ \left(-\frac{1}{2021}\right)\right) = -\frac{1}{5}$ , deci $[q] = -1$	<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = (x+1)' \cdot \ln x + (x+1) \cdot (\ln x)' =$	<b>2p</b>
	$= 1 \cdot \ln x + (x+1) \cdot \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x} + \ln x$ , $x \in (0, +\infty)$	<b>3p</b>
<b>b)</b>	$f'(1) = 2$ , $f(1) = 0$	<b>2p</b>
	Ecuția tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ , adică $y = 2x - 2$	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$f''(x) = \frac{x-1}{x^2}$ , $x \in (0, +\infty)$	<b>2p</b>
	$f''(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este convexă pe $[1, +\infty)$	<b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$g(x) = x^3 + 1$ , $x \in \mathbb{R}$ , deci $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $G(x) = \frac{x^4}{4} + x + c$ , unde $c \in \mathbb{R}$	<b>3p</b>
	Cum $G(0) = 2021$ , obținem $c = 2021$ , deci $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $G(x) = \frac{x^4}{4} + x + 2021$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left( \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \left( \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctg x \right) \Big _0^1 =$	<b>3p</b>
	$= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{x^n+1}{x^2+1} \leq \frac{x^2+1}{x^2+1}$ , pentru orice $x \in [0, 1]$ și pentru orice număr natural $n$ , $n \geq 2$ , deci	<b>3p</b>
	$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 1 dx$ , pentru orice număr natural $n$ , $n \geq 2$	
	$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \arctg x \Big _0^1 = \frac{\pi}{4}$ și $\int_0^1 1 dx = x \Big _0^1 = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 1$ , pentru orice număr natural $n$ , $n \geq 2$	<b>2p</b>