Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)-\left(2-\frac{4}{3}\right)=0$.
5p	**2.** Determinați numărul real m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+3$ conține punctul $A(2,5)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+4}-2=x$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele egale.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$ și $B(2,-2)$. Determinați numărul real a, știind că punctele A, B și $C(4,a)$ sunt coliniare.
5p	**6.** Diagonala pătratului $MNPQ$ are lungimea de $6\sqrt{2}$. Calculați perimetrul acestui pătrat.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $\det(A-B)=1$.
5p	**b)** Demonstrați că matricea $C=A\cdot A+B\cdot B$ **nu** este inversabilă.
5p	**c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A\cdot X=X\cdot B$, unde $X=\begin{pmatrix}1&2\\x&y\end{pmatrix}$.
	2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{xy+1}{x+y}$.
5p	**a)** Arătați că $1*1=1$.
5p	**b)** Determinați numărul $x\in M$ pentru care $x*2=\frac{3}{2}$.
5p	**c)** Calculați $\lg 2*\lg 4*\lg 6*\lg 8*\lg 10$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^{2020}+1, & x\in(0,1]\\ \frac{x+1}{x}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$.
5p	**a)** Arătați că funcția f este continuă în $x_0=1$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f' este crescătoare pe $(1,+\infty)$.
	2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x}$ și $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^2 x f(x)\,dx=e(e-1)$.

5p **b)** Calculați $\int_e^{e^2} \frac{g(x)}{xe^x} dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_1^e \left(f(x) + g(x) \right) dx = e^e$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)-\left(2-\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2+3}{3}-\frac{6-4}{3}=$	**2p**
	$=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$	**3p**
2.	$f(2)=5 \Leftrightarrow 2^2-2m+3=5$	**3p**
	$2m=2$, deci $m=1$	**2p**
3.	$x+4=(x+2)^2 \Rightarrow x^2+3x=0$	**2p**
	$x=-3$, care nu convine sau $x=0$, care convine	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere care au cifrele egale, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**1p**
5.	$m_{AB}=-1$	**2p**
	$m_{AC}=\frac{a-1}{5}$, deci punctele A, B și C sunt coliniare $\Leftrightarrow m_{AB}=m_{AC} \Leftrightarrow a=-4$	**3p**
6.	$MN=6$	**2p**
	$P_{MNPQ}=4MN=24$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A-B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A-B)=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0\cdot 0-(-1)\cdot 1=$	**3p**
	$=0-(-1)=1$	**2p**
b)	$C=A\cdot A+B\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$	**3p**
	$\det C=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0$, deci matricea C nu este inversabilă	**2p**
c)	$A\cdot X=\begin{pmatrix}1+x & 2+y\\ x & y\end{pmatrix}$, $X\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ x+y & y\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$\begin{pmatrix}1+x & 2+y\\ x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ x+y & y\end{pmatrix}$, deci $x=2$ și $y=0$, care convin	**3p**

2.a)	$1*1=\frac{1\cdot 1+1}{1+1}=$	**3p**
	$=\frac{2}{2}=1$	**2p**
b)	$\frac{2x+1}{x+2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 4x+2=3x+6$	**3p**
	$x=4$, care convine	**2p**
c)	$x*1=1$, unde $x\in M$	**2p**
	$\lg 2*\lg 4*\lg 6*\lg 8*\lg 10=(\lg 2*\lg 4*\lg 6*\lg 8)*\lg 10=(\lg 2*\lg 4*\lg 6*\lg 8)*1=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(x^{2020}+1\right)=2$	**2p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x+1}{x}=2$ și, cum $f(1)=2$, obținem $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, deci funcția f este continuă în $x_0=1$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	Pentru $x\in(1,+\infty)$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, deci $f''(x)=\frac{2}{x^3}$	**3p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci funcția f' este crescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^2 x f(x)\,dx=\int_1^2 e^x dx=e^x\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=e^2-e=e(e-1)$	**2p**
b)	$\int_e^{e^2}\frac{g(x)}{xe^x}\,dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\ln x\,dx=\frac{1}{2}\ln^2 x\Big\vert_e^{e^2}=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\left(2^2-1^2\right)=\frac{3}{2}$	**2p**
c)	$\int_1^e\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_1^e\frac{e^x}{x}\,dx+\int_1^e e^x\ln x\,dx=\int_1^e\frac{e^x}{x}\,dx+e^x\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}e^x\,dx=$	**3p**
	$=e^e\ln e-e^1\ln 1=e^e$	**2p**