Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați suma primilor cinci termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$, știind că $b_1=1$ și $b_2=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-11x+6$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care punctele $A(x,f(x))$ sunt situate sub axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(1-x)-\lg(7-x)=-1$.

5p **4.** Determinați numărul natural n, $n\ge2$, pentru care $C_n^1+C_n^2=6$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2a-1,a^2)$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care punctul A aparține dreptei d de ecuație $y=x+4$.

5p **6.** Determinați $\cos 2x$, știind că x este număr real și $\sin x=\frac{12}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y-2z=1\\ x-2y+z=2\\ ax+y+z=3\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-9$.

5p **b)** Demonstrați că suma elementelor matricei $B(a)=A(a)\cdot A(a)$ **nu** depinde de numărul real a.

5p **c)** Pentru $a=-2$, arătați că sistemul de ecuații este incompatibil.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+m(x+y)$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $(-1)*1=-1$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=(x+m)(y+m)-m^2$, pentru orice numere reale x, y și m.

5p **c)** Pentru $m=-1$, determinați numerele reale x pentru care $5^x*5^{x+1}=-1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}$.

2. Se consideră funcţiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+e^x+m$, unde m este număr real, și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\ln x+e^x+4x+1$.

5p **a)** Determinaţi numărul real m astfel încât funcţia F să fie o primitivă a funcţiei f.

5p **b)** Pentru $m = 4$, calculați $\int_1^e f(x)\,dx$.

5p **c)** Pentru $m = 0$, calculați $\int_1^2 x\, f(x)\,dx$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ este $q=2$	**2p**
	$S_5=\frac{b_1(q^5-1)}{q-1}=\frac{1\cdot(2^5-1)}{2-1}=31$	**3p**
2.	$f(x)<0 \Leftrightarrow 3x^2-11x+6<0$	**2p**
	$\Delta=49$, deci $x\in\left(\frac{2}{3},3\right)$	**3p**
3.	$\lg\frac{1-x}{7-x}=-1 \Rightarrow \frac{1-x}{7-x}=\frac{1}{10}$	**3p**
	$x=\frac{1}{3}$, care convine	**2p**
4.	$n+\frac{n(n-1)}{2}=6 \Leftrightarrow n^2+n-12=0$	**3p**
	Cum n este număr natural, $n\geq 2$, obținem $n=3$	**2p**
5.	$A(2a-1,a^2)\in d \Leftrightarrow a^2=2a-1+4$	**2p**
	$a^2-2a-3=0$, deci $a=-1$ sau $a=3$	**3p**
6.	$\cos 2x=1-2\sin^2 x=1-2\cdot\left(\frac{12}{13}\right)^2=$	**2p**
	$=1-2\cdot\frac{144}{169}=-\frac{119}{169}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-2+(-2)+1-4-1-1=-9$	**3p**
b)	$B(a)=A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}2-2a & -3 & -3\\ a-1 & 6 & -3\\ 2a+1 & a-1 & -2a+2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	Suma elementelor matricei $B(a)$ este egală cu 0, deci nu depinde de numărul real a	**2p**
c)	Pentru $a=-2$, sistemul devine $\begin{cases}x+y-2z=1\\ x-2y+z=2\\ -2x+y+z=3\end{cases}$	**2p**
	Adunând cele trei ecuații ale sistemului $(x+y-2z)+(x-2y+z)+(-2x+y+z)=1+2+3$, obținem $0=6$, fals, deci sistemul de ecuații este incompatibil	**3p**

2.a)	$(-1)*1=(-1)\cdot 1+m((-1)+1)=$	**3p**
	$=-1+m\cdot 0=-1$, pentru orice număr real m	**2p**
b)	$x*y=xy+mx+my+m^2-m^2=$	**2p**
	$=x(y+m)+m(y+m)-m^2=(x+m)(y+m)-m^2$, pentru orice numere reale x, y și m	**3p**
c)	$(5^x-1)(5^{x+1}-1)-1=-1\Leftrightarrow 5^x-1=0$ sau $5^{x+1}-1=0$	**2p**
	$x=0$ sau $x=-1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'+\frac{1}{x^2}=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{x^2}=$	**3p**
	$=-\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}=\frac{1-\sqrt{x}}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x^2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x^2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{x^2(\sqrt{x}+1)}=-\frac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$F'(x)=\frac{1}{x}+e^x+4$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	F este primitivă a funcției $f\Leftrightarrow F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci $m=4$	**2p**
b)	$\int_1^e f(x)\,dx=F(x)\Big\vert_1^e=F(e)-F(1)=$	**3p**
	$=e^e+3e-3$	**2p**
c)	$\int_1^2 x f(x)\,dx=\int_1^2 x\left(\frac{1}{x}+e^x\right)dx=\int_1^2\left(1+xe^x\right)dx=\left(x+(x-1)e^x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=2+e^2-1=e^2+1$	**2p**