

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați partea întreagă a numărului real $x = (\sqrt{2} - 1)^2$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu dreapta de ecuație $y = 2x - 3$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{7-2x}$.
- 5p 4. Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(2,5)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overline{AC} = 2\overline{AB}$.
- 5p 6. Calculați perimetrul triunghiului ABC , știind că $AB = 2$, $AC = 3$ și $m(\sphericalangle BAC) = 60^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -a & 0 \end{pmatrix}$ și $(A(a))^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 3 & a & 0 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = 1$.
- 5p b) Demonstrați că, pentru orice număr rațional q , matricea $A(q)$ este inversabilă.
- 5p c) Se consideră matricea $B(a) = A(a) - (A(a))^t$. Determinați numerele raționale p pentru care $B(p)B(p)B(p) + 5B(p) = O_3$.
2. Pe mulțimea $G = (0,1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$.
- 5p a) Arătați că $\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$.
- 5p b) Verificați dacă $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Știind că $(G, *)$ este grup, demonstrați că funcția $f: G \rightarrow M$, $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ este un izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul (M, \cdot) , unde $M = (0, +\infty)$ și „ \cdot ” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 1 + \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați $m \in (0, +\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul $M(m, f(m))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 2x$.
- 5p c) Demonstrați că $x \ln x + \frac{1}{e} \geq 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

5p a) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(x) dx = \frac{1}{2}$.

5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^n dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

| | | |
|-----------|--|------------------------|
| 1. | $0 < \sqrt{2} - 1 < 1 \Rightarrow 0 < (\sqrt{2} - 1)^2 < 1$ Partea întregă a numărului real x este 0 | 3p 2p |
| 2. | $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 2x = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ $x = 1$ sau $x = 3$ | 3p 2p |
| 3. | $4^{x-2} = 4^{2x-7} \Leftrightarrow x - 2 = 2x - 7$ $x = 5$ | 3p 2p |
| 4. | Numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A este egal cu $C_{10}^3 =$ $= \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$ | 3p 2p |
| 5. | $\overline{AC} = 2\overline{AB} \Leftrightarrow B$ este mijlocul segmentului AC , deci $2 = \frac{1+x_C}{2}$ și $5 = \frac{3+y_C}{2}$ $x_C = 3$ și $y_C = 7$ | 3p 2p |
| 6. | $\cos(\sphericalangle BAC) = \frac{1}{2}$ și $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\sphericalangle BAC)$, deci $BC = \sqrt{7}$ $P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 5 + \sqrt{7}$ | 3p 2p |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

| | | |
|-------------|--|------------------------|
| 1.a) | $A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 0 - 3 - (-4) - 0 = 1$ | 2p 3p |
| b) | $\det(A(a)) = a^2 - 3$, pentru orice număr real a Pentru orice număr rațional q , $\det(A(q)) \neq 0$, deci matricea $A(q)$ este inversabilă | 2p 3p |
| c) | Pentru orice număr rațional p , $B(p) = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p \\ -1 & -p & 0 \end{pmatrix}$, $B(p)B(p) = -4 \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ p & p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+p^2 \end{pmatrix}$ și $B(p)B(p)B(p) = -4(p^2 + 1)B(p)$ $(1 - 4p^2)B(p) = O_3 \Leftrightarrow p = -\frac{1}{2}$ sau $p = \frac{1}{2}$, care convin | 3p 2p |
| 2.a) | $\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1} =$ $= \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{1}{5}$ | 3p 2p |

| | | |
|----|--|--------------|
| b) | $x * \frac{1}{2} = \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2} + 1} = \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = x, \text{ pentru orice } x \in G$ $\frac{1}{2} * x = \frac{\frac{1}{2} \cdot x}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} - x + 1} = \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = x = x * \frac{1}{2}, \text{ pentru orice } x \in G \text{ și, cum } \frac{1}{2} \in G, \text{ obținem că}$ $e = \frac{1}{2} \text{ este elementul neutru al legii de compoziție „*”}$ | 2p 3p |
| c) | $f(x * y) = \frac{2xy - x - y + 1}{xy} - 1 = \frac{xy - x - y + 1}{xy} = \frac{(x-1)(y-1)}{xy} = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{y-1}{y} = f(x)f(y),$ <p>pentru orice $x, y \in G$, deci f este un morfism de la grupul $(G, *)$ la grupul (M, \cdot)</p> <p>f este continuă, f este strict descrescătoare pe $(0,1)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$,</p> <p>deci f este bijectivă $\Rightarrow f$ este un izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul (M, \cdot)</p> | 3p 2p |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

| | | |
|------|---|--------------|
| 1.a) | $f'(x) = x' \ln x + x \cdot (\ln x)' =$ $= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x, x \in (0, +\infty)$ | 2p 3p |
| b) | <p>Tangenta la graficul funcției f în $M(m, f(m))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 2x \Leftrightarrow f'(m) = 2$</p> $1 + \ln m = 2 \Rightarrow m = e, \text{ care convine}$ | 2p 3p |
| c) | $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}, f'(x) < 0, \text{ pentru orice } x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \Rightarrow f \text{ strict descrescătoare pe } \left(0, \frac{1}{e}\right) \text{ și}$ $f'(x) > 0, \text{ pentru orice } x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right) \Rightarrow f \text{ strict crescătoare pe } \left(\frac{1}{e}, +\infty\right), \text{ deci } f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right),$ <p>pentru orice $x \in (0, +\infty)$</p> $x \ln x \geq -\frac{1}{e}, \text{ deci } x \ln x + \frac{1}{e} \geq 0, \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty)$ | 3p 2p |
| 2.a) | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} =$ $= \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$ | 3p 2p |
| b) | $\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \cos t dt = \sin t \Big _0^x = \sin x, \text{ pentru orice număr real } x$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x = 0$ | 2p 3p |
| c) | $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^n x \leq 1 \Rightarrow I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x (\cos x - 1) dx \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n,$ <p>pentru orice număr natural nenul n, deci șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ e descrescător</p> $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos^n x \geq 0 \Rightarrow I_n \geq 0, \text{ pentru orice număr natural nenul } n, \text{ deci șirul } (I_n)_{n \geq 1} \text{ este}$ <p>mărginit inferior, de unde obținem că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent</p> | 2p 3p |