Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\frac{1}{\sqrt{5}-2}-\sqrt{5}=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+5x+2$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=a$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $3\log_4(3x+1)=6$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A=\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, numărul x^2 să fie număr impar.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(4,3)$ și $C(a,b)$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a, b, știind că punctul A este mijlocul segmentului BC.

5p **6**. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB=9$ și $AC=12$. Determinați lungimea înălțimii din A a triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=2$.

5p **b)** Arătați că $(A-2I_2)\cdot(A-4I_2)=6I_2$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot X=3A+4X$.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=xy-\frac{12}{x+y}+\frac{3}{x}+\frac{3}{y}$.

5p **a)** Arătați că $1*3=4$.

5p **b)** Arătați că $x*x=x^2$, pentru orice $x\in M$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care $(n*n)*(n*n)=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x^2-2x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{4(1-x)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{x^2+1}+1, & x\in(-\infty,0]\\ e^x, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^4 f(x)\,dx=e\left(e^3-1\right)$.

5p **b)** Calculați $\int_1^2 xf(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>0$, știind că $\int_{-a}^0 f(x)\,dx = a-\ln(a+1)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{\sqrt{5}-2}-\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{5}\right)^2-4}-\sqrt{5}=$	**3p**
	$=\sqrt{5}+2-\sqrt{5}=2$	**2p**
2.	$f(a)=2a^2+5a+2\Rightarrow 2a^2+5a+2=a$	**2p**
	$2a^2+4a+2=0$, de unde obținem $a=-1$	**3p**
3.	$\log_4(3x+1)=2\Rightarrow 3x+1=4^2\Rightarrow 3x+1=16$	**3p**
	$x=5$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 6 elemente, deci sunt 6 cazuri posibile	**2p**
	Numerele $x\in A$ pentru care x^2 este număr impar sunt 5, 7 și 9, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	Mijlocul segmentului BC are coordonatele $\frac{4+a}{2}$, respectiv $\frac{3+b}{2}\Rightarrow 2=\frac{4+a}{2}$, deci $a=0$	**3p**
	$-1=\frac{3+b}{2}\Rightarrow b=-5$	**2p**
6.	$BC=15$	**2p**
	$h=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{9\cdot 12}{15}=7{,}2$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4\cdot 2-2\cdot 3=$	**3p**
	$=8-6=2$	**2p**
b)	$(A-2I_2)\cdot(A-4I_2)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}=6I_2$	**3p**
c)	$A\cdot X=\begin{pmatrix}4a+2c & 4b+2d\\ 3a+2c & 3b+2d\end{pmatrix}$ și $3A+4X=\begin{pmatrix}12+4a & 6+4b\\ 9+4c & 6+4d\end{pmatrix}$, unde $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, cu a, b, c și d numere reale	**3p**
	$\begin{pmatrix}4a+2c & 4b+2d\\ 3a+2c & 3b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12+4a & 6+4b\\ 9+4c & 6+4d\end{pmatrix}$, deci $a=7$, $b=4$, $c=6$ și $d=3$, de unde obținem $X=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 6 & 3\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$1*3=1\cdot 3-\frac{12}{1+3}+\frac{3}{1}+\frac{3}{3}=$ $=3-3+3+1=4$	**3p** **2p**
b)	$x*x=x\cdot x-\frac{12}{x+x}+\frac{3}{x}+\frac{3}{x}=$ $=x^2-\frac{6}{x}+\frac{3}{x}+\frac{3}{x}=x^2-\frac{6}{x}+\frac{6}{x}=x^2$, pentru orice $x\in M$	**2p** **3p**
c)	$n*n=n^2$, $(n*n)*(n*n)=n^2*n^2=n^4$, pentru orice număr natural nenul n $n^4=1$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=1$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{0-2(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{4-4x}{(x^2-2x+2)^2}=$ $=\frac{4(1-x)}{(x^2-2x+2)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f(2)=1$, $f'(2)=-1$ Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, adică $y=-x+3$	**2p** **3p**
c)	$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$, pentru orice număr real a $f'(a)=0\Leftrightarrow\frac{4(1-a)}{(a^2-2a+2)^2}=0$, de unde obținem $a=1$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4 e^x dx=e^x\Big\vert_1^4=$ $=e^4-e=e(e^3-1)$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^2 xf(x)dx=\int_1^2 xe^x dx=\int_1^2 x(e^x)'dx=(xe^x-e^x)\Big\vert_1^2=$ $=e^2-0=e^2$	**3p** **2p**
c)	Cum a este număr real, $a>0$, obținem $\int_{-a}^0 f(x)dx=\int_{-a}^0\left(\frac{2x}{x^2+1}+1\right)dx=$ $=\int_{-a}^0\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx+\int_{-a}^0 1dx=\ln(x^2+1)\Big\vert_{-a}^0+x\Big\vert_{-a}^0=-\ln(a^2+1)+a$ $a-\ln(a^2+1)=a-\ln(a+1)\Rightarrow a^2=a$ și, cum $a>0$, obținem $a=1$	**3p** **2p**