

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Testul 6**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Calculați media geometrică a numerelor  $x = \log_6 8 + \log_6 27$  și  $y = \sqrt{2^2 \cdot 3^3 + 6^2}$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 2x + a$ , unde  $a$  este număr real. Determinați valorile reale ale lui  $a$  pentru care graficul funcției  $f$  intersectează axa  $Ox$  în două puncte distincte.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $7^{2-x^2} = 7^{2x-1}$ .
- 5p** 4. Arătați că produsul numerelor  $A_5^2$ ,  $C_6^2$  și  $A_4^2$  este pătratul unui număr natural.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1, a+1)$ ,  $B(2, -3)$  și  $C(3, 1-a)$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numărul real  $a$  pentru care punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt coliniare.
- 5p** 6. Determinați raza cercului înscris în triunghiul  $MNP$ , dreptunghic în  $N$ , știind că  $MN = 12$  și  $NP = 16$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ 2x + 4y - az = 1 \\ x + ay - z = 0 \end{cases}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(1)) = -3$ .
- 5p** b) Determinați valorile reale ale lui  $a$  pentru care matricea  $A(a)$  este inversabilă.
- 5p** c) Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție  $(x_0, y_0, z_0)$  astfel încât  $x_0 = \frac{y_0}{2} = \frac{z_0}{3}$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 27}$ .
- 5p** a) Arătați că  $2021 * (-2021) = -3$ .
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „\*”.
- 5p** c) Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{x+27}$ . Demonstrați că  $f(x) * f(y) = f(x+y)$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^3 + 3}{x^6 + 7}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{-3x^2(x^3 - 1)(x^3 + 7)}{(x^6 + 7)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Determinați asimptotele graficului funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{7}$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x+1}{e^{2x}}$ .

5p a) Arătați că  $\int_0^1 \frac{e^{3x} f(x)}{2x+1} dx = e - 1$ .

5p b) Calculați  $\int_0^1 e^x f(x) dx$ .

5p c) Arătați că  $\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{e-1}{2e^2}$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică *M\_șt-nat***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Testul 6

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$x = \log_6(8 \cdot 27) = 3$ , $y = \sqrt{144} = 12$ Media geometrică a numerelor $x$ și $y$ este $\sqrt{xy} = \sqrt{3 \cdot 12} = 6$	2p 3p
2.	Graficul funcției $f$ intersectează axa $Ox$ în două puncte distincte $\Leftrightarrow \Delta > 0$ , deci $4 - 4a > 0$ $a \in (-\infty, 1)$	3p 2p
3.	$2 - x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ $x = -3$ sau $x = 1$	3p 2p
4.	$A_5^2 = 4 \cdot 5$ , $C_6^2 = 3 \cdot 5$ și $A_4^2 = 3 \cdot 4$ $A_5^2 \cdot C_6^2 \cdot A_4^2 = 4^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 60^2$	3p 2p
5.	$m_{AB} = -\frac{a+4}{3}$ , $m_{BC} = 4 - a$ , unde $a$ este număr real $A$ , $B$ și $C$ sunt coliniare $\Leftrightarrow m_{AB} = m_{BC} \Leftrightarrow a + 4 = 3a - 12$ , deci $a = 8$	2p 3p
6.	$MP = 20$ , deci semiperimetrul $\triangle MNP$ este $p = 24$ $\mathcal{A}_{\triangle MNP} = \frac{MN \cdot NP}{2} = 96 \Rightarrow r = \frac{\mathcal{A}_{\triangle MNP}}{p} = \frac{96}{24} = 4$	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$ $= -4 + 2 + (-2) - 4 - (-1) - (-4) = -3$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = a^3 - 4a$ , pentru orice număr real $a$ $A(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0 \Leftrightarrow a(a-2)(a+2) \neq 0$ , deci $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$	2p 3p
c)	Dacă $(x_0, y_0, z_0)$ este soluție a sistemului cu $x_0 = \frac{y_0}{2} = \frac{z_0}{3}$ , atunci $\begin{cases} ax_0 + 4x_0 + 3x_0 = 1 \\ 2x_0 + 8x_0 - 3ax_0 = 1, \\ x_0 + 2ax_0 - 3x_0 = 0 \end{cases}$ unde $a$ este număr real, deci $\begin{cases} x_0(a+7) = 1 \\ x_0(10-3a) = 1 \\ 2x_0(a-1) = 0 \end{cases}$ $x_0(a+7) = 1$ , deci $x_0 \neq 0$ și, cum $2x_0(a-1) = 0$ , obținem că $a = 1$ ; $x_0(a+7) = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{8}$ și $x_0(10-3a) = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{7}$ , ceea ce este imposibil	2p 3p

<b>2.a)</b>	$2021 * (-2021) = \sqrt[3]{2021^3 + (-2021)^3 - 27} = \sqrt[3]{2021^3 - 2021^3 - 27} =$ $= \sqrt[3]{-27} = -3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$x * e = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 + e^3 - 27} = x \Leftrightarrow x^3 + e^3 - 27 = x^3$ , pentru orice număr real $x \Leftrightarrow e = 3$ Cum $3 * x = \sqrt[3]{3^3 + x^3 - 27} = \sqrt[3]{x^3} = x$ , pentru orice număr real $x$ , obținem că $e = 3$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$f(x) * f(y) = \sqrt[3]{f^3(x) + f^3(y) - 27} = \sqrt[3]{(x+27) + (y+27) - 27} =$ $= \sqrt[3]{x+y+27} = f(x+y)$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{3x^2(x^6+7) - 6x^5(x^3+3)}{(x^6+7)^2} =$ $= \frac{-3x^2(x^6+6x^3-7)}{(x^6+7)^2} = \frac{-3x^2(x^3-1)(x^3+7)}{(x^6+7)^2}$ , $x \in \mathbb{R}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+3}{x^6+7} = 0$ , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+3}{x^6+7} = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ și spre $+\infty$ la graficul funcției $f$ , iar graficul funcției $f$ nu admite asimptote verticale	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{7}$ , $x = 0$ sau $x = 1$ ; $f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{7}] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, -\sqrt[3]{7}]$ , $f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [-\sqrt[3]{7}, 1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-\sqrt[3]{7}, 1]$ și $f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, +\infty)$ $f(-\sqrt[3]{7}) = -\frac{1}{14}$ , $f(1) = \frac{1}{2}$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , deci $-\frac{1}{14} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ , pentru orice număr real $x$ , de unde obținem $-\frac{4}{7} \leq f(x) - f(y) \leq \frac{4}{7}$ , deci $ f(x) - f(y)  \leq \frac{4}{7}$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 \frac{e^{3x} f(x)}{2x+1} dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big _0^1 =$ $= e^1 - e^0 = e - 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 (2x+1)e^{-x} dx = \int_0^1 (2x+1)(-e^{-x})' dx = -(2x+1)e^{-x} \Big _0^1 + \int_0^1 2e^{-x} dx =$ $= -\frac{3}{e} + 1 - 2e^{-x} \Big _0^1 = -\frac{3}{e} + 1 - \frac{2}{e} + 2 = \frac{3e-5}{e}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{-\frac{2}{x}} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(-\frac{2}{x}\right)' e^{-\frac{2}{x}} dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{x}} \Big _1^2 =$ $= \frac{1}{2e} - \frac{1}{2e^2} = \frac{e-1}{2e^2}$	<b>3p</b> <b>2p</b>