

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că numerele $\sqrt[3]{4}$, $\log_3 9$ și $\sqrt[3]{16}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p** 2. Se consideră o funcție impară $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Demonstrați că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (f(x))^2$ este pară.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x} - \sqrt{2} \cdot 2^x = 2^{x+1} - 2\sqrt{2}$.
- 5p** 4. Determinați termenul care îl conține pe x^8 din dezvoltarea $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{10}$, unde $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** 5. În planul triunghiului ABC se consideră punctul M , astfel încât $2\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$. Determinați numărul real k , știind că $\overline{BC} = k \cdot \overline{CM}$.
- 5p** 6. Determinați $x \in (0, \pi)$, știind că $\sin 2x + 6 \cos x - \sin x - 3 = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $M(m) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & m & 1 \\ m-1 & m & -m \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

- 5p** a) Arătați că $\det A = -1$.
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice număr real m , rangul matricei $M(m)$ este cel puțin egal cu 2.
- 5p** c) Determinați numărul real m , $m \neq -1$, știind că inversa matricei $M(m)$ este matricea A .
2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 + z_1 z_2$.
- 5p** a) Arătați că $(2+i) \circ (2-i) = 9$.
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a , numărul $A = (-1 + (a+1)i) \circ (-1 + (a-1)i)$ este real strict mai mic decât 0.
- 5p** c) Determinați numerele complexe z pentru care $z \circ z = -5$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x+1}{x+3}$.

- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2}{(x+1)(x+3)}$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .
- 5p** c) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x))$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$.

- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 (e^x f(x) - 2) dx = -\frac{2}{3}$.

5p | **b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x) dx$.

5p | **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$. Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4^3} = 4 =$ $= 2^2 = (\log_3 9)^2 \Rightarrow \sqrt[3]{4}, \log_3 9$ și $\sqrt[3]{16}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	3p 2p
2.	$f(-x) = -f(x)$, pentru orice număr real x $g(-x) = (f(-x))^2 = (-f(x))^2 = (f(x))^2 = g(x)$, pentru orice număr real x , deci funcția g este pară	2p 3p
3.	$2^{2x} - \sqrt{2} \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 2^x(2^x - \sqrt{2}) - 2(2^x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow (2^x - 2)(2^x - \sqrt{2}) = 0$ $x = 1$ sau $x = \frac{1}{2}$	3p 2p
4.	$T_{k+1} = C_{10}^k (x\sqrt{x})^{10-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = C_{10}^k x^{\frac{3(10-k)}{2} - 2k} = C_{10}^k x^{\frac{30-7k}{2}}$, unde $k \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ $\frac{30-7k}{2} = 8 \Leftrightarrow k = 2$, deci $T_3 = C_{10}^2 x^8$ îl conține pe x^8	3p 2p
5.	$\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$, deci punctul M este mijlocul segmentului BC $\overline{BC} = -2\overline{CM}$, deci $k = -2$	3p 2p
6.	$2\sin x \cos x + 6\cos x - \sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\sin x + 3) - (\sin x + 3) = 0 \Leftrightarrow (\sin x + 3)(2\cos x - 1) = 0$ $\sin x + 3 \neq 0$, deci $\cos x = \frac{1}{2}$ și, cum $x \in (0, \pi)$, obținem $x = \frac{\pi}{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 0 - 4 - 0 - 0 =$ $= 3 - 4 = -1$	3p 2p
b)	Cum $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ m-1 & m \end{vmatrix} = -m + m - 1 =$ $= -1 \neq 0$, deci matricea $M(m)$ are rangul cel puțin egal cu 2, pentru orice număr real m	3p 2p
c)	$M(m) \cdot A = I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m+2 & -m-1 & 0 \\ -m-2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $m = -2$, care convine	3p 2p
2.a)	$(2+i) \circ (2-i) = 2+i+2-i+(2+i)(2-i) =$ $= 4 + 4 - i^2 = 9$	3p 2p

Probă scrisă la matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 6

Barem de evaluare și de notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

b)	$A = -1 + (a+1)i - 1 + (a-1)i + (-1 + (a+1)i)(-1 + (a-1)i) =$ $= -2 + 2ai + 1 - (a-1)i - (a+1)i - (a^2 - 1) = -a^2 < 0$, pentru orice număr real nenul a	2p 3p
c)	$2z + z^2 = -5 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 5 = 0$ $z = -1 - 2i$ sau $z = -1 + 2i$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (\ln(x+1) - \ln(x+3))' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} =$ $= \frac{x+3 - (x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{2}{(x+1)(x+3)}$, $x \in (-1, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \ln \frac{x+1}{x+3} = -\infty$ Dreapta de ecuație $x = -1$ este asimptota verticală la graficul funcției f	3p 2p
c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \frac{x+1}{x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x+1}{x+3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{-2}{x+3} \right)^x =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\left(1 + \frac{-2}{x+3} \right)^{\frac{x+3}{-2}} \right)^{-2x} = \ln e^{-2} = -2$	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 (e^x f(x) - 2) dx = \int_0^1 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$	3p 2p
b)	$\int_1^e f(\ln x) dx = \int_1^e (\ln^2 x + 1) \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^e (\ln^2 x + 1) \cdot (\ln x)' dx = \left(\frac{\ln^3 x}{3} + \ln x \right) \Big _1^e =$ $= \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$	3p 2p
c)	$f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{e^x} \leq 0$, pentru orice număr real x , deci f este descrescătoare, de unde obținem că $f(1) \leq f(x) \leq f(0)$, pentru orice $x \in [0, 1]$ Pentru orice $x \in [0, 1]$, $\frac{2}{e} \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow \frac{2}{e} x^n \leq x^n f(x) \leq x^n$, deci $\frac{2}{e(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, de unde obținem că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$	2p 3p